жня. В начальный момент гантелька ориентирована с севера на юг. На один из шариков начинает действовать постоянная сила $\vec{F}$, все время направленная на восток. Найдите скорости шариков в тот момент, когда гантелька повернется на 90°. Найдите также силу натяжения стержня в этот момент. Масса каждого шарика M.

Центр масс гантельки движется прямолинейно с ускорением $a = F/(2M)$. Кроме того, гантелька неравномерно вращается вокруг своего центра. Угловую скорость вращения можно найти довольно просто. Пусть середина гантельки сместилась к некоторому моменту времени на l, а угол поворота гантельки относительно первоначального положения составил φ. Полная механическая энергия гантельки, т.е. сумма энергии поступательного движения центра масс и энергии вращательного движения относительно центра масс, определяется работой действующей силы:

$$W_{\text{пост}} + W_{\text{вращ}} = F\left(l + \frac{1}{2}L\sin\varphi\right).$$

С другой стороны,

$$W_{\text{пост}} = 2M\frac{v^2}{2} = 2M\frac{2al}{2} = 2M\frac{Fl}{2M} = Fl,$$

$$W_{\text{вращ}} = 2\frac{M(L/2)^2\omega^2}{2} = \frac{ML^2\omega^2}{4}.$$

Отсюда можно выразить угловую скорость вращения гантельки как функцию угла φ:

$$\omega = \sqrt{\frac{2F\sin\varphi}{ML}}.$$

Теперь можно найти силу натяжения стержня T. Удобно перейти в систему отсчета, связанную с центром масс, только нужно учесть, что она неинерциальная. Движется эта система отсчета равноускоренно, так что достаточно добавить две силы инерции – на каждый шарик будет действовать добавочная сила $f = -Ma = -F/2$. Каждый шарик в этой системе движется по окружности радиусом $L/2$, тогда для одного из шариков в проекции на направлении стержня получим

$$T - \frac{F\sin\varphi}{2} = M\omega^2\frac{L}{2}.$$

Отсюда

$$T = \frac{3F\sin\varphi}{2}.$$

В условии задачи рассматривается случай $\varphi = 90^\circ$, при этом $T = 1{,}5F$.

Найти скорость поступательного движения шариков не так просто. Ускорение центра масс нам известно, а вот время «путешествия» определяется вращательным движением гантельки. При малых значениях угла отклонения все считается легко, но в нашем случае углы большие. Выражение для угловой скорости мы записали, но это функция угла, а не времени, и найти зависимость угла поворота от времени простым способом не получится. Время поворота можно записать в виде несложного интеграла: $\tau = \int d\varphi/(\omega(\varphi))$ в пределах изменения угла от 0 до $\pi/2$. Но интеграл в нашем случае «не берется», хотя примерный ответ получить можно: $\tau = 2{,}62\sqrt{Ml/(2F)}$, однако это неинтересно. Попробуем посчитать другим способом (но тоже приближенно). Для этого заметим, что при небольших углах поворота проекция действующей силы на касательное к окружности направление получается почти равной F, а в этом случае движение вдоль окружности происходит с неизменным касательным ускорением ε. Для углов до 0,5 рад так и будем считать (можно взять и другое значение угла, но это – очень круглое и не очень большое). Время τ_1 прохождения этой части пути по кругу находим из соотношения

$$\frac{\varepsilon\tau_1^2}{2} = \varphi_1, \text{ и } \tau_1 = \sqrt{\frac{2\varphi_1}{\varepsilon}} = 1{,}41\sqrt{\frac{ML}{2F}}.$$

Кстати, к концу этого интервала угловая скорость достигает 0,7 от максимальной. Дальнейшее движение происходит почти равномерно – средняя скорость вращения составляет примерно $(0{,}7+1)/2 = 0{,}85$ от максимальной. Тогда этот интервал времени равен

$$\tau_2 = \frac{\pi/2 - \varphi_1}{\omega_{\text{ср}}} = \frac{1{,}57 - 0{,}5}{0{,}85\omega_{\max}} = 1{,}26\sqrt{\frac{ML}{2F}}.$$

Всего при таком способе вычислений для времени «путешествия» получится

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = 2{,}67\sqrt{\frac{ML}{2F}}.$$

Видно, что этот грубый способ дает просто превосходную точность.

Теперь можно найти скорость центра гантельки к концу интервала и полную скорость каждого шарика в этот момент:

$$V = \sqrt{(a\tau)^2 + \left(\omega\frac{L}{2}\right)^2} = 1{,}67\sqrt{\frac{FL}{2M}}.$$

З.Рафаилов

Ф1840. *Маятник состоит из длинного легкого стержня длиной L, шарнирно закрепленного за один из концов. К другому концу стержня прикреплено велосипедное колесо радиусом R, вся масса которого сосредоточена в его ободе. Колесо может свободно вращаться вокруг своей оси. Стержень отводят на небольшой угол от вертикали и отпускают так, что он может совершать колебания в плоскости, которая перпендикулярна оси колеса. Найдите период таких колебаний. Как изменится этот период, если в оси колеса будет большое трение, не позволяющее ему вращаться?*

В том случае, когда колесо может свободно вращаться вокруг своей оси, оно вращаться как раз и не будет (понятно – почему?). Тогда маятник ведет себя как математический с периодом колебаний

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

А вот если закрепить колесо на оси («с помощью» большого трения), то оно будет поворачиваться вместе с маятником, и период колебаний станет больше. Проведем энергетический расчет. Пусть угловая скорость составляет ω, тогда полная кинетическая энергия равна сумме энергии центра масс $M\omega^2L^2/2$ и энергии вращения колеса относительно центра масс