друг другу (возможно, с разными коэффициентами подобия)?

Ответ: можно.

Рассмотрим такую раскраску квадрата (рис.1). Впишем круг в квадрат и раскрасим в черный цвет точки квадрата, лежащие вне круга. Впишем в полученный круг квадрат со сторонами, параллельными сторонам исходного квадрата. Раскрасим в белый цвет точки круга, лежащие вне «маленького» квадрата. По такому же правилу раскрасим маленький квадрат и т.д. Заметим, что мы считаем граничные точки лежащими «внутри» фигуры. Таким образом, граница каждого квадрата покрашена черным, за исключением четырех точек касания вписанного в квадрат круга, а граница каждого круга – белым, за исключением четырех вершин квадрата, вписанного в этот круг.

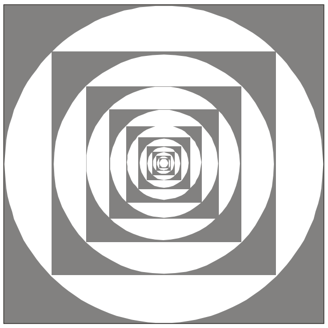

Рис.1

Пусть сторона исходного квадрата равна a (рис.2), тогда сторона маленького квадрата равна $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Следовательно, длины сторон квадратов стремятся к 0. Поэтому все точки, кроме центра, будут раскрашены. Центр раскрасим в черный цвет.

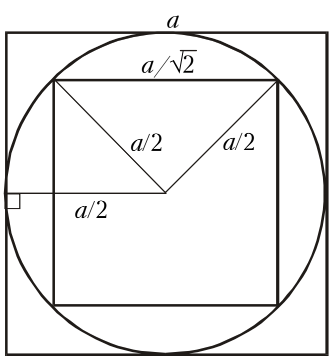

Рис.2

Очевидно, что множество черных точек квадрата подобно множеству черных точек круга, вписанного в этот квадрат (второе получается из первого гомотетией с центром в центре квадрата и с коэффициентом $\frac{a}{\sqrt{2}}$). А множество белых точек квадрата совпадает с множеством белых точек вписанного в него круга.

Г.Гальперин

М1830. *В возрастающей последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2002-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в последовательности найдется число, начиная с которого каждое число равно сумме всех предыдущих чисел.*

Пусть частное от деления суммы S_{n-1} предыдущих членов на очередной член a_n равно k_n, т.е. $S_{n-1} = a_n k_n$. Рассмотрим последовательность частных $k_n, n \ge 2002$. Так как следующий член a_{n+1} делит сумму $S_{n-1} + a_n$ и $a_{n+1} > a_n$, то

$$k_{n+1} = \frac{S_n}{a_{n+1}} = \frac{S_{n-1} + a_n}{a_{n+1}} < \frac{S_{n-1} + a_n}{a_n} = k_n + 1.$$

Таким образом, $k_{n+1} \le k_n$. Поэтому, начиная с некоторого места (при $n \ge N$), $k_n = k$. Но тогда при $n \ge N$ имеем $a_{n+1} = \frac{S_{n-1} + a_n}{k} = a_n + \frac{a_n}{k}$, т.е. с этого места получаем геометрическую прогрессию

$$a_{n+1} = \frac{k+1}{k} a_n = \frac{(k+1)^{n-N}}{k^{n-N}} a_N .$$

Получаем, что a_N делится на сколь угодно большую степень k. Значит, $k = 1$, что и требовалось доказать.

А.Шаповалов

Ф1838. *У вертикальной стены стоит палочка AB длиной L (рис.1). На ее нижнем конце B сидит жук. В тот момент, когда конец B начали двигать вправо по полу с постоянной скоростью $\vec{v}$, жук пополз по палочке с постоянной скоростью $\vec{u}$ относительно нее. На какую максимальную высоту над полом поднимется жук за время своего движения по палочке, если ее верхний конец не отрывается от стенки?*

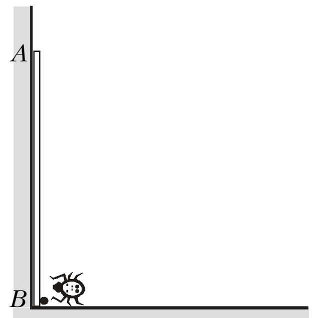

Рис.1

Пусть G – место нахождения жука на палочке (рис.2), M – середина палочки, $GK = h$ – высота жука над полом, $ON = H$ – расстояние от угла O до палочки, t – время, прошедшее с начала движения жука. Тогда $OB = vt$, $BG = ut$, $AM = OM = L/2$.

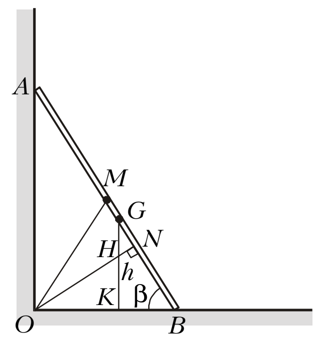

Рис.2

Треугольники ONB и GKB подобны, так как они прямоугольные и угол β у них общий, поэтому

$$\frac{GK}{ON} = \frac{BG}{OB}, \text{ или } \frac{h}{H} = \frac{ut}{vt} = \frac{u}{v},$$

откуда

$$h = H\frac{u}{v}.$$

В прямоугольном треугольнике OMN катет $ON = H$ меньше или равен гипотенузе $OM = L/2$, причем равенство достигается при $\beta = 45^\circ$. Следовательно,

$$h_{\max} = H_{\max}\frac{u}{v} = \frac{L}{2}\frac{u}{v}.$$

Этот результат верен, если за время $t_{\max} = \left(L\cos 45^\circ\right)/v$ жук не успевает доползти до верхнего конца палочки, т.е. если $ut_{\max} < L$, что эквивалентно неравенству $u \le v\sqrt{2}$. В противном случае высота h будет максимальной к моменту времени $t'_{\max} = L/u$ достижения жуком точки A:

$$h'_{\max} = \sqrt{L^2 - \left(vt'_{\max}\right)^2} = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}}.$$

С.Кузьмичев

Ф1839. *На гладком столе покоится гантелька, состоящая из жесткого легкого стержня длиной L и двух маленьких одинаковых шариков на концах стер-*