Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 2003 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1– 2003» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1846» или «Ф1853». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1852 и М1853 предлагались на Санкт-Петербургской математической олимпиаде 2002 года.

Задачи М1846—М1855, Ф1853—Ф1862

М1846. Докажите, что для любого натурального n и любого натурального $k \le n$ выполняется неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k \le 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}.$$

В.Орлов (ученик 10 кл.)

М1847. В 8 банках сидят 80 пауков. Разрешается выбрать любые две банки, суммарное число пауков в которых четное, и пересадить часть пауков из одной банки в другую, чтобы их стало поровну. При любом ли начальном распределении пауков в банках с помощью нескольких таких операций можно добиться того, чтобы в каждой банке оказалось одинаковое число пауков?

В.Каскевич

М1848. В треугольник ABC вписана окружность с центром O, которая касается сторон в точках A_1, B_1, C_1 (рис.1). Отрезки AO, BO, CO пересекают окружность в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что площадь треугольника $A_2B_2C_2$ равна половине площади шестиугольника $B_1A_2C_1B_2A_1C_2$.

В.Произволов

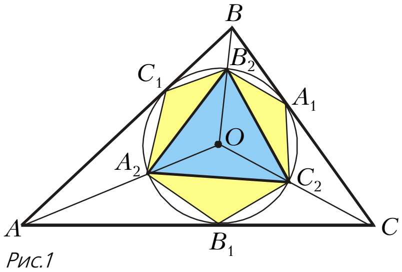

Рис.1

М1849. Простое число p удовлетворяет равенству

$$p^2 = 2^n \cdot 3^m + 1,$$

где n и m – целые неотрицательные числа. Докажите, что $p \le 17$.

В.Сендеров

М1850. Числа натурального ряда от 1 до $n(n+1)$ записаны последовательно красным и синим цветами в следующий очередности. Первые n чисел – красные, затем одно – синее, затем $n-1$ чисел – красные, затем два – синие и т.д., наконец, одно число – красное и последние n чисел – синие. Таким образом, убывающие по численности группы красных чисел перемежаются возрастающими по численности группами синих чисел. Докажите, что сумма синих чисел вдвое больше суммы красных чисел.

В.Произволов

М1851. Нарисованы координатные оси Ox, Oy и график функции $y=\frac{1}{8x}$. Масштаб не указан. Пользуясь только циркулем, постройте точку (1; 1).

С.Токарев

М1852. Дано натуральное число n. В интервале $(n^2; n^2+n)$ выбраны различные натуральные числа a и b. Докажите, что в этом интервале нет натуральных делителей числа ab, отличных от a и b.

С.Иванов

М1853. С числом разрешается производить следующие операции:

1) возвести в любую натуральную степень;
2) отрезать последние две цифры, умножить образованное ими число на 3 и прибавить к числу, образованному остальными цифрами.

Можно ли с помощью таких операций из числа 81 получить число 82?

К.Кохась

М1854*. Пусть $f(x)$ – многочлен степени $m \ge 2$ с целыми коэффициентами. Докажите, что множество