$R\left(\sqrt[n]{a}\right)$. Рассмотрим полином

$$q(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)=$$
$$= x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}-\dots+(-1)^n\sigma_n .$$

Тогда $\sigma_1=\sum_{k=1}^{n}x_k=n\alpha_0$, т.е. второй коэффициент полинома $q(x)$ принадлежит полю R. Далее, произведя возведение в квадрат, убедимся, что $s_2=\sum_{k=1}^{n}x_k^2$ – число из R, откуда из формулы (которой мы пользовались уже) $s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$ (и из равенства $\sigma_1=s_1$) получаем, что третий коэффициент полинома q тоже принадлежит R. Предлагаем читателю проверить, что так будет и дальше: все коэффициенты полинома q являются числами из R (если читатель захочет доказать это самостоятельно, он должен будет ознакомиться с формулой Ньютона, выражающей σ_k как полиномы от $s_1,\dots,s_k$).

Отметим, что если какой-то полином $P(x)$ имеет корень r, то он имеет корнем и $\varepsilon^k r$. Действительно, полиномы P и $Q(x)=x^n-a$ имеют общий корень, а Q неприводим, значит, P делится на Q, т.е. *все* x_k *являются корнями* $P(x)$.

Более того, можно доказать, что если *неприводимый* полином P *простой* степени n становится приводимым при присоединении радикала степени k, где k – тоже простое число, то $k=n$. Мы не будем приводить здесь чисто техническое доказательство этого факта. Отсюда можно получить, что многочлен $q(x)$ является степенью многочлена $p(x)$. Но так как степени этих многочленов простые числа, то n (степень q) делится на 5, а так как n – простое число, то $n=5$ и многочлены p и q просто совпадают.

Итак,

$$p(x)=(x-x_1)\dots(x-x_5),$$

x_1 – вещественное число, а

$$x_k=\alpha_0+\alpha_1\varepsilon^{k-1}r+\dots+\alpha_4\varepsilon^{4(k-1)}r^4,\ r=\sqrt[5]{a},\ 1\le k\le 5 .$$

При этом можно считать, что число ε присоединено к R, ибо $\sqrt[5]{1}$ выражается через биквадратные радикалы (построение правильного пятиугольника циркулем и линейкой осуществимо!).

Возможны два случая: 1) a – вещественное число; 2) a невещественно.

Рассмотрим первый случай. В силу того, что $\varepsilon\in R$, можно считать, что r само вещественно. Мы обозначили через x_1 вещественный корень полинома p. Тогда $x_1=\alpha_0+\alpha_1r+\dots+\alpha_4r^4$, значит, $x_1=\bar{x}_1=\bar{\alpha}_0+\bar{\alpha}_1r+\dots+\bar{\alpha}_4r^4$ (через $\bar{c}$ обозначается, как обычно, число, комплексно сопряженное с c), и из единственности представления корней получаем, что все α_i вещественны. Но тогда все остальные корни комплексны. Докажем это, например, для x_2. Имеем: $x_2=\alpha_0+\alpha_1\varepsilon r+\dots+\alpha_4\varepsilon^4r^4$, тогда $\bar{x}_2=\alpha_0+\alpha_1\varepsilon^4r+\dots+\alpha_4\varepsilon r^4$. Если допустить, что $x_2=\bar{x}_2$, то получилось бы (снова из единственности представления), что $\alpha_1\varepsilon=\alpha_1\varepsilon^4$, т.е. $\alpha_1=0$, аналогично, $\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$, что невозможно.

Теперь разберем второй случай, когда a имеет модуль ρ и аргумент $\varphi\ne 0$ и можно считать, что $r=\sqrt[5]{\rho}\,e^{i\varphi/5}$. Положим $R=\sqrt[5]{\rho^2}$. Тогда $\bar{r}=\frac{R}{r}$. И снова открываются две возможности: а) присоединение R ведет к разложению p; б) присоединение R не ведет к разложению p. В первом случае (так как R вещественно) дело сводится к предыдущему, и, значит, p имеет единственный вещественный корень. Остался случай б). Тогда

$$x_1=\alpha_0+\alpha_1r+\dots+\alpha_4r^4=\bar{x}_1=\bar{\alpha}_0+\bar{\alpha}_1\bar{r}+\dots+\bar{\alpha}_4\bar{r}^4=$$
$$=\frac{r^5}{a}\left(\bar{\alpha}_0+\bar{\alpha}_1\frac{R}{r}+\dots+\bar{\alpha}_4\frac{R^4}{r^4}\right)=$$
$$=\bar{\alpha}_0+\bar{\alpha}_4\frac{R^4}{a}r+\dots+\bar{\alpha}_1\frac{R}{a}r^4,$$

откуда в силу единственности представления x_1 приходим к равенствам

$$\alpha_0=\bar{\alpha}_0,\ \alpha_1=\bar{\alpha}_4\frac{R^4}{a},$$
$$\alpha_2=\bar{\alpha}_3\frac{R^3}{a},\ \alpha_3=\bar{\alpha}_2\frac{R^2}{a},\ \alpha_4=\bar{\alpha}_1\frac{R}{a}. \qquad (2)$$

А из этих соотношений легко доказать уже, что остальные x_k вещественны. Докажем это, к примеру, для x_2. Имеем:

$$x_2=\alpha_0+\alpha_1\varepsilon r+\dots+\alpha_4\varepsilon^4r^4,$$

значит,

$$\bar{x}_2=\alpha_0+\bar{\alpha}_1\bar{\varepsilon}\bar{r}+\dots+\bar{\alpha}_4\bar{\varepsilon}^4\bar{r}^4=$$
$$=\alpha_0+\alpha_4\frac{R^4}{a}\varepsilon r+\dots+\alpha_1\frac{R}{a}\varepsilon^4r^4=x_2 .$$

Итак, либо все корни p вещественны, либо только один. А уравнение $x^5-4x-2=0$ имеет три вещественных корня. Значит, корни этого уравнения выразить в радикалах нельзя. Теорема Абеля доказана.

Приложение

1. Числовое поле. Это множество K чисел (действительных или комплексных), содержащее 1 и 0, а также вместе с любыми двумя числами a и $b\ne 0$ их произведение, сумму, разность и частное, т.е. результат любых арифметических действий над этими числами.

Множества $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел, $\boldsymbol{C}$ всех комплексных чисел, $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел, а также множества чисел вида $a+bi$ ($a\in\boldsymbol{Q}$, $b\in\boldsymbol{Q}$), $a+b\sqrt{2}$, $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ являются полями.

2. Неприводимые многочлены. Многочлен $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ с коэффициентами, принадлежащими некоторому числовому полю K, называется неприводимым над этим полем, если он не раскладывается на два множителя ненулевой степени с коэффициентами из этого поля. В частности, любой многочлен первой степени неприводим. Отметим, что при $n>1$ неприводимый над полем K многочлен не имеет корней, принадлежащих полю K. Неприводимые многочлены во многом аналогичны простым числам. В частности, можно доказать теорему, аналогичную основной теореме арифметики: