Теорема Абеля

Теорема Абеля. *Ни для какого натурального n, большего четырех, нельзя указать формулу, которая выражала бы корни любого уравнения через его коэффициенты при помощи радикалов.*

Мы докажем здесь несколько больше, а именно, что *существует (конкретное) уравнение пятой степени с целыми коэффициентами, не разрешимое в радикалах.*

Примером служит уравнение

$$p(x) = x^5 - 4x - 2 = 0 .$$

Можно доказать (попробуйте сделать это самостоятельно), что многочлен $p(x)$ нельзя разложить на множители меньшей степени с рациональными коэффициентами (такие многочлены называются неприводимыми – об их свойствах см. Приложение). Неразрешимость в радикалах уравнения $p(x) = 0$ следует из такого фундаментального утверждения, доказываемого нами ниже: *если неприводимое уравнение пятой степени разрешимо в радикалах, то оно имеет либо пять, либо лишь один действительный корень.* Докажем, что наше уравнение имеет три действительных корня. Обозначим корни этого уравнения $\{x_k\}_{k=1}^5$. По теореме Виета (см. Приложение), $\sigma_1 = \sum_{k=1}^5 x_k = 0$ (ибо сумма корней равна коэффициенту при x^4, а он равен нулю). Далее, $\sigma_2 = \sum_{1\le k,l\le 5} x_k x_l = 0$ (ибо сумма попарных произведений корней равна коэффициенту при x^3, а он тоже равен нулю). Но тогда $s_2 = \sum_{k=1}^5 x_k^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0$, откуда следует, что все пять корней вещественными быть не могут. Значит, имеется комплексный корень $a + bi$. Но тогда число $a - bi$ тоже будет корнем. А с другой стороны, наше уравнение имеет не меньше трех вещественных корней, ибо $p(-2) = -26$, $p(-1) = 1$, $p(1) = -5$, $p(2) = 22$, и существование трех корней следует из теоремы о промежуточных значениях, принимаемых непрерывной функцией. В итоге мы доказали, что многочлен $p(x)$ имеет ровно три вещественных корня.

(Приведенное доказательство – алгебраическое, и теорема Виета нам понадобится в дальнейшем, но утверждение о том, что приведенное уравнение не имеет пяти вещественных корней, совсем просто доказать аналитически: если бы оно имело пять вещественных корней, то по теореме Ролля производная $p'(x) = 5x^4 - 4$ имела бы четыре вещественных корня, а она имеет только два.)

Доказательство основного утверждения

Пусть $p(x) = x^5 + \sum_{k=0}^4 a_k x^k$ (где a_k – рациональные числа) – неприводимый многочлен (т.е. многочлен, не разлагающийся в произведение двух многочленов меньшей степени), разрешимый в радикалах. Это значит, что его корни получаются из совокупности всех дробей присоединением некоторых радикалов. Так например, корни многочлена второй степени получаются присоединением к дробям чисел вида $p_1 + p_2\sqrt{a}$, где a – это дробь, не являющаяся квадратом, а корни уравнения $x^3 + px + q = 0$ получаются присоединением к дробям сначала радикалов $\sqrt{a}$, а затем чисел вида $q_1 + q_2\sqrt[3]{c} + q_3\sqrt[3]{c^2}$, где $c = p_1 + p_2\sqrt{a}$. Числа $b + \sqrt{a}$ можно складывать, вычитать, умножать и делить (кроме, разумеется, деления на ноль). Такие числовые образования называются *полями*. Числа вида $q_1 + q_2\sqrt[3]{c} + q_3\sqrt[3]{c^2}$, где $c = p_1 + p_2\sqrt{a}$, а q_i и p_j – дроби, также образуют поле. Если $p(x)$ разрешим в радикалах, это значит, что к дробям последовательно присоединяются радикалы вида $\sqrt[n_1]{a_1}$ и образуют поле первого ранга R_1, затем присоединяется корень $\sqrt[n_2]{a_2}$, где a_2 принадлежит R_2, и т. д.

Пусть R – числовое поле, получаемое из рациональных чисел присоединением к ним всех радикалов, кроме последнего $r = \sqrt[n]{a}$, где a принадлежит R и $a \ne \alpha^n$ ни для кого α из R. Не ограничив себя в общности, можно считать, что n – простое число (ибо если n – не простое число, то его можно записать в виде $n = n_1 p$, где p – простое, после чего присоединить $\sqrt[n_1]{a} = a_1$, а затем и $\sqrt[p]{a_1}$).

По определению, $p(x)$ имеет корень в $\mathrm{R}\left(\sqrt[n]{a}\right)$ (так обозначается поле, полученное присоединением к полю R радикала $\sqrt[n]{a}$). Любое число в $\mathrm{R}\left(\sqrt[n]{a}\right)$ представимо как многочлен степени $n - 1$ от r с коэффициентами из R (см. Приложение). Мы пользуемся здесь тем, что если R – числовое поле и $r = \sqrt[n]{a}$, где n – простое число, $a \ne \alpha^n$ для α из R, то любой элемент x из $\mathrm{R}\left(\sqrt[n]{a}\right)$ единственным образом представим в виде $x = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k r^k$. Этот факт нетрудно доказать непосредственно.

Итак, пусть x_1 – вещественный корень полинома $p(x)$ (а у полинома пятой степени один вещественный корень обязательно существует – это следует из уже упоминавшегося свойства непрерывной функции принимать все промежуточные значения; полином пятой степени с положительным старшим коэффициентом при стремлении x к плюс бесконечности стремится к плюс бесконечности, т.е. становится положительным, аналогично, при отрицательных x он становится отрицательным, значит, он имеет ноль). Представим x_1 в виде $x_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k r^k$ с коэффициентами из R. Пусть $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$ – первообразный корень из единицы и $x_k = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \varepsilon^{(k-1)j} r^j$, $1 \le k \le n$. Получили n чисел из