

Уравнения Пелля

А. СПИВАК

В ПРЕДЫДУЩИХ ЧАСТЯХ СТАТЬИ ДОКАЗАНО много разных интересных теорем. Не доказана только одна, самая трудная – десятая. Эта теорема утверждает, что любое уравнение $x^2 - dy^2 = 1$, где d – натуральное число, не являющееся точным квадратом, имеет хотя бы одно решение в натуральных числах.

Я изложу четыре доказательства. Первый способ использует принцип Дирихле и приближения иррациональных чисел рациональными. Этот способ короткий и прозрачный, но у него есть принципиальный недостаток: он не дает приемлемого для практики метода нахождения решения. Похожие друг на друга другие два способа – английский и индийский методы – свободны от этого недостатка, являясь алгоритмами поиска решения. К сожалению, доказательство того, что эти алгоритмы рано или поздно останавливаются и приводят именно к наименьшему решению, требует значительных усилий.

Мне больше всего нравится четвертый способ, использующий цепные дроби. Их роль в теории уравнений Пелля не менее значительна, чем роль иррациональных чисел, о которой было рассказано в первой и

второй частях статьи. Да и сами по себе цепные дроби чрезвычайно интересны.

Но прежде всего расскажу одну историю.¹

Вызов Ферма

Начало есть более чем половина всего.
Аристотель

«Сейчас едва ли найдется кто-нибудь, кто предлагает арифметические вопросы, и кто-нибудь, кто их понимает. Не потому ли это происходит, что до сих пор арифметику рассматривали скорее с геометрической, чем с арифметической точки зрения? Так было всегда – и в древних, и в современных работах; примером тому является даже Диофант. Ибо хотя он и более чем другие освободился от геометрии в том отношении, что ограничивает свой анализ рассмотрением рациональных чисел, однако даже у него геометрия не полностью отсутствует...»

Теперь арифметика имеет, так сказать, собственную область изучения – теорию целых чисел. Евклид лишь слегка затронул ее в своих «Началах», а его

¹ Многие из того, что вошло в эту часть статьи, заимствовано из книги Г.Эдвардса «Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел».

Продолжение. Начало см. в «Кванте» №3, 4.



последователи недостаточно занимались этой теорией (если только она не содержалась в тех книгах Диофанта, которых мы лишились вследствие разрушительного действия времени); следовательно, арифметикам предстоит развить или восстанавливать ее.

Поэтому арифметикам, дабы осветить тот путь, по которому надо следовать, предлагаю я эту теорему, чтобы они доказали ее, или эту задачу, чтобы они решили ее. Если же преуспеют они в ее доказательстве или решении, то им придется признать, что вопросы такого рода ничем не уступают в отношении красоты, трудности или метода доказательства самым знаменитым вопросам геометрии.

Если дано произвольное число, которое не является квадратом, то найдется бесконечное множество таких квадратов, что если этот квадрат умножить на данное число и к произведению прибавить единицу, то результат будет квадратом.

Пример. Пусть 3, которое не является квадратом, будет данным числом. Если умножить его на квадрат, равный 1, и к произведению добавить 1, то в результате получится 4, что является квадратом. Если то же самое число 3 умножить на 16, то получится произведение, которое при увеличении на 1 превращается в 49, тоже квадрат. И кроме 1 и 16 можно найти бесконечное множество квадратов с тем же свойством.

Но я спрашиваю об общем правиле решения – когда дано произвольное число, не являющееся квадратом. Например, найдите такой квадрат, что если произведение этого квадрата и числа 109, 149 или 433 увеличить на 1, то получится квадрат.»

Таков был вызов Ферма, который он сделал в 1657 году другим математикам, в частности английским. Очевидно, что он желает не традиционного диофантова решения в рациональных числах, а решения задачи в целых числах.² Как это ни странно, но пояснения к задаче были опущены одним из посредников в том экземпляре письма, который был передан английским математикам; в результате они сочли задачу совершенно глупой. А именно, можно ввести обозначение

$$x = 1 + \frac{m}{n} y$$

и подставить в уравнение:

$$\left(1 + \frac{m}{n} y\right)^2 - dy^2 = 1, \quad \frac{2m}{n} y + \frac{m^2}{n^2} y^2 - dy^2 = 0,$$

$$2mn = (dn^2 - m^2) y,$$

откуда

$$y = \frac{2mn}{dn^2 - m^2}, \quad x = \frac{dn^2 + m^2}{dn^2 - m^2}.$$

Полученные формулы, как легко убедиться, дают бесконечно много решений в рациональных числах.

Упражнение 54. а) Убедитесь, что эти формулы дают все решения. б) Найдите аналогичные формулы для уравнения $x^2 + y^2 = 1$.

² По иронии судьбы, ныне слово «диофантово» употребляют, желая получить решения в целых числах, тогда как сам Диофант ни в одной из дошедших до нас работ не занимался решениями в целых числах, а только в рациональных.

Когда же дополнительное требование, что x и y должны быть целыми числами, дошло до английских математиков, то они пожаловались, что условие задачи изменили. Конечно, их жалобу можно понять в свете сильной диофантовой традиции, но, как указал Ферма, было наивно надеяться, что он предложил тривиальную задачу. Как видно из приведенной здесь таблицы, задача Ферма весьма сложная: для $d = 61$ наименьшее решение – это пара $y = 226153\ 980$ и $x = 1766319049$. (Впрочем, впервые посчитал это не Ферма, а родившийся в 1114 году индеец Бхаскара Акхария.) А для $d = 109$ вообще $y = 15140424455100$.

Таблица

2) 2	3) 1	5) 4	6) 2
7) 3	8) 1	10) 6	11) 3
12) 2	13) 180	14) 4	15) 1
17) 8	18) 4	19) 39	20) 2
21) 12	22) 42	23) 5	24) 1
26) 10	27) 5	28) 24	29) 1820
30) 2	31) 273	32) 3	33) 4
34) 6	35) 1	37) 12	38) 6
39) 4	40) 3	41) 120	42) 2
43) 531	44) 30	45) 24	46) 3588
47) 7	48) 1	50) 14	51) 7
52) 90	53) 9100	54) 66	55) 12
56) 2	57) 20	58) 2574	59) 69
60) 4	61) 226153980	62) 8	63) 1
65) 16	66) 8	67) 5967	68) 4
69) 936	70) 30	71) 413	72) 2
73) 267000	74) 430	75) 3	76) 6630
77) 40	78) 6	79) 9	80) 1
82) 18	83) 9	84) 6	85) 30996
86) 1122	87) 3	88) 21	89) 53000
90) 2	91) 165	92) 120	93) 1260
94) 221064	95) 4	96) 5	97) 6377352
98) 10	99) 1	101) 20	102) 101
03) 22419	104) 5	105) 4	106) 3115890
107) 93	108) 130	109) 15140424455100	110) 2
111) 28	112) 12	113) 113296	114) 96
115) 105	116) 910	117) 60	118) 28254
119) 11	120) 1	122) 22	123) 11
124) 414960	125) 83204	126) 40	127) 419775
128) 51	129) 1484	130) 570	131) 927
132) 2	133) 224460	134) 12606	135) 21
136) 3	137) 519712	138) 4	139) 6578829
140) 61	41) 8	142) 12	143) 1
145) 24	146) 12	147) 8	148) 6
149) 2113761020	150) 4		

Что сделали англичане?

Англичанам удалось не только найти частные решения при $d = 109, 149$ или 433 , но и разработать общую процедуру получения решений для любого значения d . Кто это сделал – неизвестно. Хотя Джон Валлис (1616–1703) первым дал описание процедуры и получил решения в трех частных случаях, он приписывает авторство виконту Уильяму Броункеру (1620–1684). В опубликованной переписке Валлиса нет никаких указаний на то, что Броункер когда-либо сообщал ему что-либо об этом методе, кроме нескольких простых

замечаний, которые, быть может, послужили зародышем идеи, развитой впоследствии Валлисом. Возможно, Валлису было важно добиться расположения Броункера и его покровительства, поэтому он и назвал этот метод методом Броункера (ибо Броункер в 1662–1677 годах был президентом основанного в 1660 году Лондонского Королевского общества). Впрочем, некоторые историки считают самого Броункера весьма способным математиком и утверждают, что по своим личным качествам Валлис скорее мог приписать себе чужие заслуги, чем отказаться от своих.

Строго говоря, англичане не решили задачу Ферма, которая заключалась в том, что при данном (не являющемся квадратом) натуральном d существует бесконечно много натуральных x таких, что $dx^2 + 1$ является квадратом. Они не доказали, что процедура всегда завершится, и, кажется, даже не понимали, что это нужно доказывать.³

Ферма написал письмо, в котором признал, что англичанам удалось решить его задачу, и не проявил ни малейшей неудовлетворенности их методом. Однако главным для Ферма в этом письме было убедить англичан, что перед ними была поставлена достойная задача, так что он мог сознательно закрыть глаза на недостатки.

Несколько лет спустя, подводя в письме к Каркави итоги некоторых своих открытий, Ферма указал, что англичане получили решение его задачи только в отдельных частных случаях и им не удалось дать общее доказательство. Очевидная интерпретация этого замечания заключается в том, что Ферма заметил отсутствие доказательства того, что процесс всегда приводит к решению; с другой стороны, в нем можно увидеть и менее глубокую критику того, что процесс был описан в недостаточно общих терминах. Ферма утверждает, что он мог бы дать доказательство, «надлежащим образом» применив метод бесконечного спуска. Эти слова, разумеется, нельзя считать достаточным свидетельством в пользу того, что он умел решать свою задачу.

Индийский и английский методы

Легенды гласят, что за несколько веков до нашей эры в Индии было известно равенство $2 \cdot 408^2 + 1 = 577^2$. Равенство $92 \cdot 120^2 + 1 = 1151^2$ вместе с изощренной техникой его вывода было получено Брахмагуптой (родился в 598 году). Общий способ решения уравнения Пелля⁴ дал Бхаскара Акхария. Этот метод называют циклическим или индийским.

³ Даже Эйлеру не удалось доказать, что английский метод всегда приводит к успеху. Удалось это Лагранжу через 110 лет после того, как Валлис отослал ответ на вызов Ферма.

⁴ Термин «уравнение Пелля» возник в результате ошибки Леонарда Эйлера. Почему-то – возможно, по причине смутных воспоминаний, оставшихся от чтения «Алгебры» Валлиса, – у Эйлера сложилось впечатление, будто Валлис приписывает метод решения этой задачи не Броункеру, а Пеллю – современнику Валлиса, который много раз упомянут в его работах, но не имел никакого отношения к уравнению $x^2 - dy^2 = 1$. Эйлер впервые сделал эту ошибку в 1730 году, когда ему было 23 года, но она попала и в окончательное издание «Введения в алгебру» (примерно 1770 г.). Эйлер был самым популярным математическим автором своего времени, и ошибка вошла в историю...

Познакомимся с ним на примере $d = 67$. Наша цель – найти такие натуральные x и y , чтобы разность $y^2 - 67x^2$ равнялась 1. В качестве первого приближения рассмотрим равенство

$$8^2 - 67 \cdot 1^2 = -3.$$

Вспомнив формулу

$$(a^2 - 67b^2)(c^2 - 67d^2) = (ac + 67bd)^2 - 67(bc + ad)^2$$

и применив ее к равенствам $8^2 - 67 \cdot 1^2 = -3$ и $r^2 - 67 \cdot 1^2 = s$, где r (а тем самым и s) будет определено позже, получим

$$(8r + 67)^2 - 67(r + 8)^2 = -3s.$$

Пытаясь сделать правую часть (по модулю) как можно меньшей только за счет выбора наименьшего по модулю значения s , мы выбрали бы $r = 8$, при котором $s = -3$, и получили бы равенство

$$131^2 - 67 \cdot 16^2 = 9,$$

с которым непонятно что делать дальше.

Идея циклического метода – выбор такого r , чтобы $r + 8$ делилось на 3 и s при этом было как можно меньше по модулю. (Когда это сделано, обе части уравнения разделятся нацело на 3^2 .)

Идея английского метода – выбор такого как можно большего r , что $r^2 < d$ и $r + 8$ делится на 3.

Как видите, методы очень похожи. Оба можно применять для поиска решений при данном d , не зная заранее, что это приведет к успеху. (Между прочим, априори нет никакой уверенности в том, что в общем случае в английском методе после каждого шага r будет существовать. Это – одна из теорем, которые надо доказывать, обосновывая английский метод.)

Проведем подробно вычисления для циклического метода. Чтобы $r + 8$ делилось на 3, число r должно равняться одному из чисел бесконечной в обе стороны арифметической прогрессии $\dots, -2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots$. Выбор $r = 7$ дает наименьшее по модулю значение $s = -18$. Этим r и s соответствует равенство

$$123^2 - 67 \cdot 15^2 = 54,$$

которое после сокращения на 9 превращается в

$$41^2 - 67 \cdot 5^2 = 6.$$

Теперь – следующий шаг циклического метода:

$$(41r + 67 \cdot 5)^2 - 67(5r + 41)^2 = 6s.$$

Число $5r + 41$ делится на 6 при $r = \dots, -7, -1, 5, 11, 17, 23, \dots$. Выбор $r = 5$ дает наименьшее по модулю $s = -42$, и мы получаем равенство

$$540^2 - 67 \cdot 66^2 = 6 \cdot (-42),$$

которое после сокращения на 6^2 превращается в

$$90^2 - 67 \cdot 11^2 = -7.$$

Дальше надо выполнить следующий шаг циклического метода, потом еще один, и так до тех пор, пока не получим равенство, в правой части которого будет 1.

Упражнения

55. Выполнив еще пять шагов циклического метода, найдите решение $48842^2 - 67 \cdot 5967^2 = 1$.

56. а) Выполните вычисления для $d = 67$, применяя английский метод. б) Сравните английский и циклический методы для $d = 67$ и для нескольких других значений d , сформулируйте гипотезу о взаимосвязи этих двух методов.

Если вы решили эти два упражнения, то убедились, что индийский и английский методы позволяют найти решение для $d = 67$. Однако ни для английского, ни для индийского метода нет никаких очевидных причин, по которым равенство с правой частью 1 должно обязательно получиться в общем случае. Есть и много других вопросов. Например, если эти методы дадут нам какое-то решение уравнения Пелля, можно ли утверждать, что это решение – наименьшее из возможных?

Я уверен, что попытка самостоятельно разобраться в этих вопросах будет очень полезной. Любитель компьютеров может начать с написания английской и индийской программ, которые вычислят приведенную выше таблицу. А вот для обоснования циклического или английского метода (а лучше бы обоим!) вам придется создать чуть ли не целую теорию! Но даже если у вас ничего не получится (а у большинства, вы уж не обижайтесь, действительно ничего не получится, поскольку задача очень сложна даже для тех, кто успешно справляется с «Задачиком «Кванта»»), это будет очень полезно.

Доказательство существования**Приближения иррациональных чисел рациональными**

Теорему 10 можно доказать, рассматривая приближения числа \sqrt{d} рациональными числами. Для этого сначала сформулирую и докажу следующую лемму.

Лемма. Для любого вещественного числа ξ и любого натурального числа N существуют такие целое число a и натуральное число b , что $b \leq N$ и

$$|b\xi - a| \leq \frac{1}{N+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим числа 0 и 1, а также дробные части чисел $\xi, 2\xi, \dots, N\xi$. Если бы все расстояния между этими $(N+2)$ -мя числами были больше $1/(N+1)$, то получилось бы противоречие. Значит, какое-то из расстояний не превосходит $1/(N+1)$. Если

$$|\{b_2\xi\} - \{b_1\xi\}| \leq \frac{1}{N+1},$$

где $1 \leq b_1 < b_2 \leq N$, то

$$|(b_2\xi - [b_2\xi]) - (b_1\xi - [b_1\xi])| \leq \frac{1}{N+1},$$

так что достаточно взять $b = b_2 - b_1$ и $a = [b_2\xi] - [b_1\xi]$. Остальные два случая столь же очевидны: если

$$\{b\xi\} - 0 \leq \frac{1}{N+1},$$

то годится $a = [b\xi]$; если же

$$1 - \{b\xi\} \leq \frac{1}{N+1},$$

то можно взять $a = [b\xi] + 1$. Лемма доказана.

Упражнения

57. Для любых чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ и любого натурального числа N существуют такие целые числа b_1, b_2, \dots, b_k и a , хотя бы одно из которых отлично от нуля, что абсолютные величины чисел b_1, b_2, \dots, b_k не превосходят N и

$$|b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \dots + b_k\xi_k - a| \leq \frac{1}{N^k + 1}.$$

Докажите это.

58. Для любых чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ и любого натурального числа N существует такое натуральное число b , что $b \leq N^k$ и дробные части чисел $b\xi_1, b\xi_2, \dots, b\xi_k$ не превосходят $1/N$. Докажите это.

Доказательство теоремы 10

Положим $\xi = \sqrt{d}$. Для любого натурального $n > 1$ в силу леммы существуют такие натуральные числа a_n и b_n , что $b_n < n$ и

$$|a_n - b_n\sqrt{d}| \leq \frac{1}{n}.$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} |a_n^2 - db_n^2| &= |a_n - b_n\sqrt{d}| \cdot |a_n + b_n\sqrt{d}| \leq \\ &\leq \frac{1}{n} |a_n - b_n\sqrt{d} + 2b_n\sqrt{d}| \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 2n\sqrt{d} \right) < 1 + 2\sqrt{d}. \end{aligned}$$

Итак, величина $a_n^2 - db_n^2$ может принимать лишь конечное число значений. Но n можно брать сколь угодно большим! И при этом в силу неравенства $|a_n - b_n\sqrt{d}| \leq \frac{1}{n}$ при $n \rightarrow \infty$ имеем $b_n \rightarrow \infty$. Значит, хотя бы для одного целого числа c , по модулю меньшего $1 + 2\sqrt{d}$, существует бесконечно много пар натуральных чисел (a_n, b_n) , для которых

$$a_n^2 - db_n^2 = c.$$

Зафиксируем одно из таких чисел c . Рассмотрим остатки от деления чисел a_n и b_n на $|c|$. Поскольку количество остатков конечно, то существуют такие две⁵ разные пары натуральных чисел $(a; b)$ и $(A; B)$, что

$$a^2 - db^2 = c = A^2 - dB^2$$

и

$$\begin{aligned} a &\equiv A \pmod{|c|}, \\ b &\equiv B \pmod{|c|}. \end{aligned}$$

(Продумайте это!) Рассмотрим частное

$$\begin{aligned} \frac{A + B\sqrt{d}}{a + b\sqrt{d}} &= \frac{(a - b\sqrt{d})(A + B\sqrt{d})}{a^2 - db^2} = \\ &= \frac{aA - bBd + (aB - Ab)\sqrt{d}}{c}. \end{aligned}$$

⁵ На самом деле даже не две, а бесконечно много, но нам это не нужно.

Поскольку

$$aA - bBd \equiv a^2 - b^2d = c \equiv 0 \pmod{|c|}$$

и

$$aB - Ab \equiv ab - ab = 0 \pmod{|c|},$$

то числа $x = (aA - bBd)/c$ и $y = (aB - Ab)/c$ целые. Так как

$$\begin{aligned} x^2 - dy^2 &= (x - y\sqrt{d})(x + y\sqrt{d}) = \\ &= \frac{A - B\sqrt{d}}{a - b\sqrt{d}} \cdot \frac{A + B\sqrt{d}}{a + b\sqrt{d}} = \frac{A^2 - dB^2}{a^2 - db^2} = \frac{c}{c} = 1 \end{aligned}$$

и $y \neq 0$, то $(x; y)$ – искомое нетривиальное решение уравнения Пелля!

Упражнения

59. Докажите, что $y \neq 0$.

60. Докажите, что для любого натурального числа n существуют такие натуральные x и y , что $x^2 - 3y^2 = 1$ и y делится на 3^n , однако степенью тройки y быть не может (за тривиальным исключением $y = 1$).

Цепные дроби

Цепная дробь числа $\sqrt{2}$

Очевидно, $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 2 - 1 = 1$ и, следовательно,

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.$$

Воспользуемся этой формулой много-предного раз:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}} = \dots = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}}} \end{aligned}$$

Мы получили разложение числа $\sqrt{2}$ в цепную дробь.

Впрочем, что это значит – разложить данное число α в цепную дробь? Это значит, прежде всего, выделить его целую часть, т.е. представить его в виде

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\},$$

где $[\alpha]$ – целая часть числа α , т.е. такое целое число, что $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$. Обозначаем: $a_0 = [\alpha]$. Если α – целое число, то $\{\alpha\} = 0$, и процесс разложения в цепную дробь на этом обрывается. Если же $\{\alpha\} > 0$, то число α можно представить в виде $\alpha = a_0 + \frac{1}{\beta}$, где $\beta > 1$. Записав $\beta = [\beta] + \{\beta\}$, находим следующее непол-

ное частное: $a_1 = [\beta]$. Если $\{\beta\} = 0$, то разложение получено. Если же $\{\beta\} > 0$, то

$$\beta = a_1 + \frac{1}{\gamma},$$

где $\gamma > 1$. И так далее, и так далее, пока очередное число не окажется целым или – до бесконечности (точнее, пока не наступит конец света).

Если исходное число α иррационально, то и β , и γ , и все возникающие далее такие числа иррациональны, так что процесс разложения в цепную дробь никогда не остановится и даст бесконечную последовательность a_0, a_1, a_2, \dots элементов – так называемых *неполных частных*.

Обрывая цепную дробь числа $\sqrt{2}$ в разных местах, получаем *подходящие дроби*:

$$\frac{1}{1}; \quad 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}; \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}; \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12}; \dots$$

Наши старые знакомые!

Может быть, это случайное совпадение? Нет, если n -этажная дробь (т.е. дробь, в которой n двоек) приводится к несократимому виду x/y , то $(n + 1)$ -этажная дробь равна

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{x}{y}} = 1 + \frac{y}{x + y} = \frac{x + 2y}{x + y}.$$

Очевидно, $\text{НОД}(x + 2y, x + y) = \text{НОД}(y, x + y) = \text{НОД}(x, y)$, так что дробь $(x + 2y)/(x + y)$ тоже несократима. Поэтому увеличение количества дробных черт на единицу – это переход от несократимой дроби x/y к несократимой дроби $(x + 2y)/(x + y)$. А это и есть формулы первой части статьи!

Подходящие дроби $1/1, 3/2, 7/5, 17/12, \dots$ замечательны тем, что дают (попеременно, слева и справа) весьма точные приближения числа $\sqrt{2}$. А именно,

$$\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \frac{239}{169} < \dots < \sqrt{2} < \dots < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}.$$

Оценить погрешность приближения несложно:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x}{y} - \sqrt{2} \right| &= \\ &= \left| \frac{(x - y\sqrt{2})(x + y\sqrt{2})}{y(x + y\sqrt{2})} \right| = \frac{|x^2 - 2y^2|}{y^2 \left(\frac{x}{y} + \sqrt{2} \right)} = \frac{1}{y^2 \left(\frac{x}{y} + \sqrt{2} \right)}. \end{aligned}$$

Например,

$$0 < \frac{17}{12} - \sqrt{2} = \frac{1}{12^2 \left(\sqrt{2} + \frac{17}{12} \right)} < \frac{1}{12^2 \cdot 2\sqrt{2}} < 0,0025,$$

$$0 < \sqrt{2} - \frac{41}{29} = \frac{1}{29^2 \left(\sqrt{2} + \frac{41}{29} \right)} < \frac{1}{29^2 \cdot 2 \cdot \frac{41}{29}} < 0,00043,$$

так что дробь $17/12$ приближает число $\sqrt{2}$ с точностью $0,0025$, а дробь $41/29$ – с точностью $0,00043$.

Упражнения

61. Существует ли дробь, которая приближает число $\sqrt{2}$ с точностью до одной миллионной, а ее знаменатель – трехзначное число?

62. Докажите следующие утверждения:

а) Если m, n – натуральные числа и $\sqrt{2} > \frac{m}{n}$, то $\sqrt{2} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2n^2\sqrt{2}}$.

б) Если m, n – натуральные числа, то $\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| > \frac{1}{4n^2}$.

в) Существует такая бесконечная ограниченная последовательность x_1, x_2, x_3, \dots , что для любых различных m и n выполнено неравенство $|x_n - x_m| \geq \frac{1}{|n-m|}$. (Этот пункт решали в 1978 году школьники двух самых старших классов на Всесоюзной математической олимпиаде.)

г) Если $\varepsilon > 0$, то неравенство $\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{(\varepsilon + 2\sqrt{2})n^2}$ имеет лишь конечное число решений в натуральных числах m, n .

63. Для любого положительного числа a рассмотрим последовательность, первый член которой $a_1 = a$, а каждый следующий вычисляется по формуле $a_{n+1} = (2 + a_n)/(1 + a_n)$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$.

Цепная дробь числа $\sqrt{3}$

Поступим с $\sqrt{3}$ так же, как мы поступали с $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= 1 + (\sqrt{3} - 1) = \\ &= 1 + \frac{1}{(\sqrt{3} + 1)/2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3} + 1}} = \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{3} - 1)}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{(\sqrt{3} + 1)/2}}} = \dots \\ &\dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}. \end{aligned}$$

Выпишем несколько первых подходящих дробей:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1}; \quad 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}; \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{3}; \\ 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = \frac{7}{4}; \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{19}{11}; \end{aligned}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}}} = \frac{26}{15}.$$

Заметим:

$$\begin{aligned} 1^2 - 3 \cdot 1 &= -2, & 2^2 - 3 \cdot 1^2 &= 1, \\ 5^2 - 3 \cdot 3^2 &= -2, & 7^2 - 3 \cdot 4^2 &= 1, \\ 19^2 - 3 \cdot 11^2 &= -2, & 26^2 - 3 \cdot 15^2 &= 1, \end{aligned}$$

так что половина дробей «лишние» – они дают решения не уравнения $x^2 - 3y^2 = 1$, а уравнения $x^2 - 3y^2 = -2$. (Как вы помните, подходящие дроби числа $\sqrt{2}$ обладают аналогичным свойством.)

Упражнение 64. Если начать с дроби $1/1$ или $2/1$ и применять правило $\frac{x}{y} \rightarrow \frac{x+3y}{x+2y}$, то все дроби, которые будут при этом получены, являются подходящими дробями числа $\sqrt{3}$. Докажите это.

В следующей части статьи мы докажем многие удивительные свойства цепных дробей. В частности, если x/y – подходящая дробь числа ξ , то $\left| \xi - \frac{x}{y} \right| < \frac{1}{y^2}$.

Кроме того, если $x^2 - dy^2 = 1$ и x, y – натуральные числа, то x/y – подходящая дробь числа \sqrt{d} , так что для поиска решения $(x; y)$ уравнения Пелля следует перебирать лишь подходящие дроби числа \sqrt{d} . А вот обратное утверждение, как видно на примерах $d = 2$ и $d = 3$, ложно: не каждая подходящая дробь соответствует решению уравнения Пелля.

Вряд ли вам удастся самостоятельно создать теорию цепных дробей. Но поэкспериментировать, разлагая разные числа (и рациональные, и иррациональные) в цепные дроби и вычисляя подходящие дроби, очень полезно. Хотя бы одну-две интересные закономерности обязательно обнаружите! Например, постарайтесь выяснить, как связаны между собой английский метод решения уравнения $x^2 - dy^2 = 1$ и цепная дробь числа \sqrt{d} .

(Продолжение следует)