Уравнения Пелля

А. СПИВАК

В предыдущих частях статьи доказано много разных интересных теорем. Не доказана только одна, самая трудная – десятая. Эта теорема утверждает, что любое уравнение $x^2 - dy^2 = 1$, где d – натуральное число, не являющееся точным квадратом, имеет хотя бы одно решение в натуральных числах.

Я изложу четыре доказательства. Первый способ использует принцип Дирихле и приближения иррациональных чисел рациональными. Этот способ короткий и прозрачный, но у него есть принципиальный недостаток: он не дает приемлемого для практики метода нахождения решения. Похожие друг на друга другие два способа – английский и индийский методы – свободны от этого недостатка, являясь алгоритмами поиска решения. К сожалению, доказательство того, что эти алгоритмы рано или поздно останавливаются и приводят именно к наименьшему решению, требует значительных усилий.

Мне больше всего нравится четвертый способ, использующий цепные дроби. Их роль в теории уравнений Пелля не менее значительна, чем роль иррациональных чисел, о которой было рассказано в первой и второй частях статьи. Да и сами по себе цепные дроби чрезвычайно интересны.

Но прежде всего расскажу одну историю.[1]

Вызов Ферма

Начало есть более чем половина всего.
Аристотель

«Сейчас едва ли найдется кто-нибудь, кто предлагает арифметические вопросы, и кто-нибудь, кто их понимает. Не потому ли это происходит, что до сих пор арифметику рассматривали скорее с геометрической, чем с арифметической точки зрения? Так было всегда – и в древних, и в современных работах; примером тому является даже Диофант. Ибо хотя он и более чем другие освободился от геометрии в том отношении, что ограничивает свой анализ рассмотрением рациональных чисел, однако даже у него геометрия не полностью отсутствует...

Теперь арифметика имеет, так сказать, собственную область изучения – теорию целых чисел. Евклид лишь слегка затронул ее в своих «Началах», а его

Продолжение. Начало см. в «Кванте» №3, 4.

[1] *Многое из того, что вошло в эту часть статьи, заимствовано из книги Г.Эдвардса «Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел».*

Иллюстрация В.Акатьевой

последователи недостаточно занимались этой теорией (если только она не содержалась в тех книгах Диофанта, которых мы лишились вследствие разрушительного действия времени); следовательно, арифметикам предстоит развивать или восстанавливать ее.

Поэтому арифметикам, дабы осветить тот путь, по которому надо следовать, предлагаю я эту теорему, чтобы они доказали ее, или эту задачу, чтобы они решили ее. Если же преуспеют они в ее доказательстве или решении, то им придется признать, что вопросы такого рода ничем не уступают в отношении красоты, трудности или метода доказательства самым знаменитым вопросам геометрии.

> *Если дано произвольное число, которое не является квадратом, то найдется бесконечное множество таких квадратов, что если этот квадрат умножить на данное число и к произведению прибавить единицу, то результат будет квадратом.*

Пример. Пусть 3, которое не является квадратом, будет данным числом. Если умножить его на квадрат, равный 1, и к произведению добавить 1, то в результате получится 4, что является квадратом. Если то же самое число 3 умножить на 16, то получится произведение, которое при увеличении на 1 превращается в 49, тоже квадрат. И кроме 1 и 16 можно найти бесконечное множество квадратов с тем же свойством.

Но я спрашиваю об общем правиле решения – когда дано произвольное число, не являющееся квадратом. Например, найдите такой квадрат, что если произведение этого квадрата и числа 109, 149 или 433 увеличить на 1, то получится квадрат.»

Таков был вызов Ферма, который он сделал в 1657 году другим математикам, в частности английским. Очевидно, что он желает не традиционного диофантова решения в рациональных числах, а решения задачи в *целых* числах.[2] Как это ни странно, но пояснения к задаче были опущены одним из посредников в том экземпляре письма, который был передан английским математикам; в результате они сочли задачу совершенно глупой. А именно, можно ввести обозначение

$$x = 1 + \frac{m}{n} y$$

и подставить в уравнение:

$$\left(1 + \frac{m}{n} y\right)^2 - dy^2 = 1, \qquad \frac{2m}{n} y + \frac{m^2}{n^2} y^2 - dy^2 = 0,$$

$$2mn = \left(dn^2 - m^2\right) y,$$

откуда

$$y = \frac{2mn}{dn^2 - m^2}, \; x = \frac{dn^2 + m^2}{dn^2 - m^2}.$$

Полученные формулы, как легко убедиться, дают бесконечно много решений в рациональных числах.

Упражнение 54. а) Убедитесь, что эти формулы дают все решения. б) Найдите аналогичные формулы для уравнения $x^2 + y^2 = 1$.

[2] *По иронии судьбы, ныне слово «диофантово» употребляют, желая получить решения в целых числах, тогда как сам Диофант ни в одной из дошедших до нас работ не занимался решениями в целых числах, а только в рациональных.*

Когда же дополнительное требование, что x и y должны быть целыми числами, дошло до английских математиков, то они пожаловались, что условие задачи изменили. Конечно, их жалобу можно понять в свете сильной диофантовой традиции, но, как указал Ферма, было наивно надеяться, что он предложил тривиальную задачу. Как видно из приведенной здесь таблицы, задача Ферма весьма сложная: для $d = 61$ наименьшее решение – это пара $y = 226153\,980$ и $x = 1766319049$. (Впрочем, впервые посчитал это не Ферма, а родившийся в 1114 году индиец Бхаскара Акхария.) А для $d = 109$ вообще $y = 15140424455100$.

Таблица

2) 2	3) 1	5) 4	6) 2
7) 3	8) 1	10) 6	11) 3
12) 2	13) 180	14) 4	15) 1
17) 8	18) 4	19) 39	20) 2
21) 12	22) 42	23) 5	24) 1
26) 10	27) 5	28) 24	29) 1820
30) 2	31) 273	32) 3	33) 4
34) 6	35) 1	37) 12	38) 6
39) 4	40) 3	41) 120	42) 2
43) 531	44) 30	45) 24	46) 3588
47) 7	48) 1	50) 14	51) 7
52) 90	53) 9100	54) 66	55) 12
56) 2	57) 20	58) 2574	59) 69
60) 4	61) 226153980	62) 8	63) 1
65) 16	66) 8	67) 5967	68) 4
69) 936	70) 30	71) 413	72) 2
73) 267000	74) 430	75) 3	76) 6630
77) 40	78) 6	79) 9	80) 1
82) 18	83) 9	84) 6	85) 30996
86) 1122	87) 3	88) 21	89) 53000
90) 2	91) 165	92) 120	93) 1260
94) 221064	95) 4	96) 5	97) 6377352
98) 10	99) 1	101) 20	102) 101
03) 22419	104) 5	105) 4	106) 3115890
107) 93	108) 130	109) 15140424455100	110) 2
111) 28	112) 12	113) 113296	114) 96
115) 105	116) 910	117) 60	118) 28254
119) 11	120) 1	122) 22	123) 11
124) 414960	125) 83204	126) 40	127) 419775
128) 51	129) 1484	130) 570	131) 927
132) 2	133) 224460	134) 12606	135) 21
136) 3	137) 519712	138) 4	139) 6578829
140) 61	41) 8	142) 12	143) 1
145) 24	146) 12	147) 8	148) 6
149) 2113761020	150) 4		

Что сделали англичане?

Англичанам удалось не только найти частные решения при $d = 109$, 149 или 433, но и разработать общую процедуру получения решений для любого значения d. Кто это сделал – неизвестно. Хотя Джон Валлис (1616–1703) первым дал описание процедуры и получил решения в трех частных случаях, он приписывает авторство виконту Уильяму Броункеру (1620–1684). В опубликованной переписке Валлиса нет никаких указаний на то, что Броункер когда-либо сообщал ему что-либо об этом методе, кроме нескольких простых замечаний, которые, быть может, послужили зародышем идеи, развитой впоследствии Валлисом. Возможно, Валлису было важно добиться расположения Броункера и его покровительства, поэтому он и назвал этот метод методом Броункера (ибо Броункер в 1662–1677 годах был президентом основанного в 1660 году Лондонского Королевского общества). Впрочем, некоторые историки считают самого Броункера весьма способным математиком и утверждают, что по своим личным качествам Валлис скорее мог приписать себе чужие заслуги, чем отказаться от своих.

Строго говоря, англичане не решили задачу Ферма, которая заключалась в том, что при данном (не являющемся квадратом) натуральном d существует бесконечно много натуральных x таких, что dx^2+1 является квадратом. Они не доказали, что процедура всегда завершится, и, кажется, даже не понимали, что это нужно доказывать.[3]

Ферма написал письмо, в котором признал, что англичанам удалось решить его задачу, и не проявил ни малейшей неудовлетворенности их методом. Однако главным для Ферма в этом письме было убедить англичан, что перед ними была поставлена достойная задача, так что он мог сознательно закрыть глаза на недостатки.

Несколько лет спустя, подводя в письме к Каркави итоги некоторых своих открытий, Ферма указал, что англичане получили решение его задачи только в отдельных частных случаях и им не удалось дать общее доказательство. Очевидная интерпретация этого замечания заключается в том, что Ферма заметил отсутствие доказательства того, что процесс всегда приводит к решению; с другой стороны, в нем можно увидеть и менее глубокую критику того, что процесс был описан в недостаточно общих терминах. Ферма утверждает, что он мог бы дать доказательство, «надлежащим образом» применив метод бесконечного спуска. Эти слова, разумеется, нельзя считать достаточным свидетельством в пользу того, что он умел решать свою задачу.

Индийский и английский методы

Легенды гласят, что за несколько веков до нашей эры в Индии было известно равенство $2\cdot 408^2+1=577^2$. Равенство $92\cdot 120^2+1=1151^2$ вместе с изощренной техникой его вывода было получено Брахмагуптой (родился в 598 году). Общий способ решения уравнения Пелля[4] дал Бхаскара Акхария. Этот метод называют циклическим или индийским.

Познакомимся с ним на примере $d=67$. Наша цель – найти такие натуральные x и y, чтобы разность y^2-67x^2 равнялась 1. В качестве первого приближения рассмотрим равенство

$$8^2-67\cdot 1^2=-3\,.$$

Вспомнив формулу

$$\left(a^2-67b^2\right)\left(c^2-67d^2\right)=(ac+67bd)^2-67\,(bc+ad)^2$$

и применив ее к равенствам $8^2-67\cdot 1^2=-3$ и $r^2-67\cdot 1^2=s$, где r (а тем самым и s) будет определено позже, получим

$$(8r+67)^2-67\,(r+8)^2=-3s\,.$$

Пытаясь сделать правую часть (по модулю) как можно меньшей только за счет выбора наименьшего по модулю значения s, мы выбрали бы $r=8$, при котором $s=-3$, и получили бы равенство

$$131^2-67\cdot 16^2=9\,,$$

с которым непонятно что делать дальше.

Идея циклического метода – выбор такого r, чтобы $r+8$ делилось на 3 и s при этом было как можно меньше по модулю. (Когда это сделано, обе части уравнения разделятся нацело на 3^2.)

Идея английского метода – выбор такого как можно большего r, что $r^2<d$ и $r+8$ делится на 3.

Как видите, методы очень похожи. Оба можно применять для поиска решений при данном d, не зная заранее, что это приведет к успеху. (Между прочим, априори нет никакой уверенности в том, что в общем случае в английском методе после каждого шага r будет существовать. Это – одна из теорем, которые надо доказывать, обосновывая английский метод.)

Проведем подробно вычисления для циклического метода. Чтобы $r+8$ делилось на 3, число r должно равняться одному из чисел бесконечной в обе стороны арифметической прогрессии …, −2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, … Выбор $r=7$ дает наименьшее по модулю значение $s=-18$. Этим r и s соответствует равенство

$$123^2-67\cdot 15^2=54\,,$$

которое после сокращения на 9 превращается в

$$41^2-67\cdot 5^2=6.$$

Теперь – следующий шаг циклического метода:

$$(41r+67\cdot 5)^2-67\,(5r+41)^2=6s.$$

Число $5r+41$ делится на 6 при $r=\ldots,\ -7,\ -1,\ 5,\ 11,\ 17,\ 23,\ldots$ Выбор $r=5$ дает наименьшее по модулю $s=-42$, и мы получаем равенство

$$540^2-67\cdot 66^2=6\cdot(-42),$$

которое после сокращения на 6^2 превращается в

$$90^2-67\cdot 11^2=-7\,.$$

Дальше надо выполнить следующий шаг циклического метода, потом еще один, и так до тех пор, пока не получим равенство, в правой части которого будет 1.

[3] *Даже Эйлеру не удалось доказать, что английский метод всегда приводит к успеху. Удалось это Лагранжу через 110 лет после того, как Валлис отослал ответ на вызов Ферма.*

[4] *Термин «уравнение Пелля» возник в результате ошибки Леонарда Эйлера. Почему-то – возможно, по причине смутных воспоминаний, оставшихся от чтения «Алгебры» Валлиса,– у Эйлера создалось впечатление, будто Валлис приписывает метод решения этой задачи не Броункеру, а Пеллю – современнику Валлиса, который много раз упомянут в его работах, но не имел никакого отношения к уравнению $x^2-dy^2=1$. Эйлер впервые сделал эту ошибку в 1730 году, когда ему было 23 года, но она попала и в окончательное издание «Введения в алгебру» (примерно 1770 г.). Эйлер был самым популярным математическим автором своего времени, и ошибка вошла в историю…*

Упражнения

55. Выполнив еще пять шагов циклического метода, найдите решение $48842^2 - 67 \cdot 5967^2 = 1$.

56. а) Выполните вычисления для $d = 67$, применяя английский метод. б) Сравнив английский и циклический методы для $d = 67$ и для нескольких других значений d, сформулируйте гипотезу о взаимосвязи этих двух методов.

Если вы решили эти два упражнения, то убедились, что индийский и английский методы позволяют найти решение для $d = 67$. Однако ни для английского, ни для индийского метода нет никаких очевидных причин, по которым равенство с правой частью 1 должно обязательно получиться в общем случае. Есть и много других вопросов. Например, если эти методы дадут нам какое-то решение уравнения Пелля, можно ли утверждать, что это решение – наименьшее из возможных?

Я уверен, что попытка самостоятельно разобраться в этих вопросах будет очень полезной. Любитель компьютеров может начать с написания английской и индийской программ, которые вычислят приведенную выше таблицу. А вот для обоснования циклического или английского метода (а лучше бы обоих!) вам придется создать чуть ли не целую теорию! Но даже если у вас ничего не получится (а у большинства, вы уж не обижайтесь, действительно ничего не получится, поскольку задача очень сложна даже для тех, кто успешно справляется с «Задачником «Кванта»), это будет очень полезно.

Доказательство существования

Приближения иррациональных чисел рациональными

Теорему 10 можно доказать, рассматривая приближения числа $\sqrt{d}$ рациональными числами. Для этого сначала сформулирую и докажу следующую лемму.

Лемма. *Для любого вещественного числа ξ и любого натурального числа N существуют такие целое число a и натуральное число b, что $b \le N$ и*

$$|b\xi - a| \le \frac{1}{N+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим числа 0 и 1, а также дробные части чисел ξ, 2ξ, …, $N\xi$. Если бы все расстояния между этими $(N+2)$-мя числами были больше $1/(N+1)$, то получилось бы противоречие. Значит, какое-то из расстояний не превосходит $1/(N+1)$. Если

$$\left|\{b_2\xi\} - \{b_1\xi\}\right| \le \frac{1}{N+1},$$

где $1 \le b_1 < b_2 \le N$, то

$$\left|\left(b_2\xi - [b_2\xi]\right) - \left(b_1\xi - [b_1\xi]\right)\right| \le \frac{1}{N+1},$$

так что достаточно взять $b = b_2 - b_1$ и $a = [b_2\xi] - [b_1\xi]$. Остальные два случая столь же очевидны: если

$$\{b\xi\} - 0 \le \frac{1}{N+1},$$

то годится $a = [b\xi]$; если же

$$1 - \{b\xi\} \le \frac{1}{N+1},$$

то можно взять $a = [b\xi] + 1$. Лемма доказана.

Упражнения

57. Для любых чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ и любого натурального числа N существуют такие целые числа $b_1, b_2, \ldots, b_k$ и a, хотя бы одно из которых отлично от нуля, что абсолютные величины чисел $b_1, b_2, \ldots, b_k$ не превосходят N и

$$|b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_k\xi_k - a| \le \frac{1}{N^k + 1}.$$

Докажите это.

58. Для любых чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ и любого натурального числа N существует такое натуральное число b, что $b \le N^k$ и дробные части чисел $b\xi_1, b\xi_2, \ldots, b\xi_k$ не превосходят $1/N$. Докажите это.

Доказательство теоремы 10

Положим $\xi = \sqrt{d}$. Для любого натурального $n > 1$ в силу леммы существуют такие натуральные числа a_n и b_n, что $b_n < n$ и

$$\left|a_n - b_n\sqrt{d}\right| \le \frac{1}{n}.$$

Очевидно,

$$\left|a_n^2 - db_n^2\right| = \left|a_n - b_n\sqrt{d}\right| \cdot \left|a_n + b_n\sqrt{d}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{n}\left|a_n - b_n\sqrt{d} + 2b_n\sqrt{d}\right| \le \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + 2n\sqrt{d}\right) < 1 + 2\sqrt{d}.$$

Итак, величина $a_n^2 - db_n^2$ может принимать лишь конечное число значений. Но n можно брать сколь угодно большим! И при этом в силу неравенства $\left|a_n - b_n\sqrt{d}\right| \le \frac{1}{n}$ при $n \to \infty$ имеем $b_n \to \infty$. Значит, хотя бы для одного целого числа c, по модулю меньшего $1 + 2\sqrt{d}$, существует бесконечно много пар натуральных чисел $(a_n; b_n)$, для которых

$$a_n^2 - db_n^2 = c.$$

Зафиксируем одно из таких чисел c. Рассмотрим остатки от деления чисел a_n и b_n на $|c|$. Поскольку количество остатков конечно, то существуют такие две[5] разные пары натуральных чисел $(a; b)$ и $(A; B)$, что

$$a^2 - db^2 = c = A^2 - dB^2$$

и

$$a \equiv A \pmod{|c|},$$
$$b \equiv B \pmod{|c|}.$$

(Продумайте это!) Рассмотрим частное

$$\frac{A + B\sqrt{d}}{a + b\sqrt{d}} = \frac{\left(a - b\sqrt{d}\right)\left(A + B\sqrt{d}\right)}{a^2 - db^2} =$$

$$= \frac{aA - bBd + (aB - Ab)\sqrt{d}}{c}.$$

[5] *На самом деле даже не две, а бесконечно много, но нам это не нужно.*

Поскольку

$$aA - bBd \equiv a^2 - b^2 d = c \equiv 0 \pmod{|c|}$$

и

$$aB - Ab \equiv ab - ab = 0 \pmod{|c|},$$

то числа $x = (aA - bBd)/c$ и $y = (aB - Ab)/c$ целые. Так как

$$x^2 - dy^2 = \left(x - y\sqrt{d}\right)\left(x + y\sqrt{d}\right) =$$

$$= \frac{A - B\sqrt{d}}{a - b\sqrt{d}} \cdot \frac{A + B\sqrt{d}}{a + b\sqrt{d}} = \frac{A^2 - dB^2}{a^2 - db^2} = \frac{c}{c} = 1$$

и $y \neq 0$, то $(x; y)$ – искомое нетривиальное решение уравнения Пелля!

Упражнения

59. Докажите, что $y \neq 0$.

60. Докажите, что для любого натурального числа n существуют такие натуральные x и y, что $x^2 - 3y^2 = 1$ и y делится на 3^n, однако степенью тройки y быть не может (за тривиальным исключением $y = 1$).

Цепные дроби

Цепная дробь числа $\sqrt{2}$

Очевидно, $\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right) = 2 - 1 = 1$ и, следовательно,

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.$$

Воспользуемся этой формулой много-премного раз:

$$\sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right) = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}} = \ldots = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}}}.$$

Мы получили разложение числа $\sqrt{2}$ в цепную дробь.

Впрочем, что это значит – разложить данное число α в цепную дробь? Это значит, прежде всего, выделить его целую часть, т.е. представить его в виде

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\},$$

где $[\alpha]$ – целая часть числа α, т.е. такое целое число, что $[\alpha] \le \alpha < [\alpha] + 1$. Обозначаем: $a_0 = [\alpha]$. Если α – целое число, то $\{\alpha\} = 0$, и процесс разложения в цепную дробь на этом обрывается. Если же $\{\alpha\} > 0$, то число α можно представить в виде $\alpha = a_0 + \dfrac{1}{\beta}$, где $\beta > 1$. Записав $\beta = [\beta] + \{\beta\}$, находим следующее неполное частное: $a_1 = [\beta]$. Если $\{\beta\} = 0$, то разложение получено. Если же $\{\beta\} > 0$, то

$$\beta = a_1 + \frac{1}{\gamma},$$

где $\gamma > 1$. И так далее, и так далее, пока очередное число не окажется целым или – до бесконечности (точнее, пока не наступит конец света).

Если исходное число α иррационально, то и β, и γ, и все возникающие далее такие числа иррациональны, так что процесс разложения в цепную дробь никогда не остановится и даст бесконечную последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ элементов – так называемых *неполных частных*.

Обрывая цепную дробь числа $\sqrt{2}$ в разных местах, получаем *подходящие дроби*:

$$\frac{1}{1};\quad 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};\quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5};\quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12}; \ldots$$

Наши старые знакомые!

Может быть, это случайное совпадение? Нет, если n-этажная дробь (т.е. дробь, в которой n двоек) приводится к несократимому виду x/y, то $(n + 1)$-этажная дробь равна

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{x}{y}} = 1 + \frac{y}{x + y} = \frac{x + 2y}{x + y}.$$

Очевидно, НОД$(x + 2y,\ x + y)$ = НОД$(y,\ x + y)$ = = НОД$(x,\ y)$, так что дробь $(x + 2y)/(x + y)$ тоже несократима. Поэтому увеличение количества дробных черт на единицу – это переход от несократимой дроби x/y к несократимой дроби $(x + 2y)/(x + y)$. А это и есть формулы первой части статьи!

Подходящие дроби $1/1$, $3/2$, $7/5$, $17/12$,... замечательны тем, что дают (попеременно, слева и справа) весьма точные приближения числа $\sqrt{2}$. А именно,

$$\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \frac{239}{169} < \ldots < \sqrt{2} < \ldots < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}.$$

Оценить погрешность приближения несложно:

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{2}\right| =$$

$$= \left|\frac{\left(x - y\sqrt{2}\right)\left(x + y\sqrt{2}\right)}{y\left(x + y\sqrt{2}\right)}\right| = \frac{\left|x^2 - 2y^2\right|}{y^2\left(\frac{x}{y} + \sqrt{2}\right)} = \frac{1}{y^2\left(\frac{x}{y} + \sqrt{2}\right)}.$$

Например,

$$0 < \frac{17}{12} - \sqrt{2} = \frac{1}{12^2\left(\sqrt{2} + \frac{17}{12}\right)} < \frac{1}{12^2 \cdot 2\sqrt{2}} < 0{,}0025,$$

$$0 < \sqrt{2} - \frac{41}{29} = \frac{1}{29^2\left(\sqrt{2} + \frac{41}{29}\right)} < \frac{1}{29^2 \cdot 2 \cdot \frac{41}{29}} < 0{,}00043,$$

так что дробь 17/12 приближает число $\sqrt{2}$ с точностью 0,0025, а дробь 41/29 – с точностью 0,00043.

Упражнения

61. Существует ли дробь, которая приближает число $\sqrt{2}$ с точностью до одной миллионной, а ее знаменатель – трехзначное число?

62. Докажите следующие утверждения:

а) Если m, n – натуральные числа и $\sqrt{2} > \frac{m}{n}$, то $\sqrt{2} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2n^2\sqrt{2}}$.

б) Если m, n – натуральные числа, то $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| > \frac{1}{4n^2}$.

в) Существует такая бесконечная ограниченная последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$, что для любых различных m и n выполнено неравенство $|x_n - x_m| \geq \frac{1}{|n-m|}$. (Этот пункт решали в 1978 году школьники двух самых старших классов на Всесоюзной математической олимпиаде.)

г) Если $\varepsilon > 0$, то неравенство $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{\left(\varepsilon + 2\sqrt{2}\right)n^2}$ имеет лишь конечное число решений в натуральных числах m, n.

63. Для любого положительного числа a рассмотрим последовательность, первый член которой $a_1 = a$, а каждый следующий вычисляется по формуле $a_{n+1} = (2 + a_n)/(1 + a_n)$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

Цепная дробь числа $\sqrt{3}$

Поступим с $\sqrt{3}$ так же, как мы поступали с $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{3} = 1 + \left(\sqrt{3} - 1\right) =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\left(\sqrt{3}+1\right)/2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{3}-1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{3}+1}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \left(\sqrt{3}-1\right)}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\left(\sqrt{3}+1\right)/2}}} = \ldots$$

$$\ldots = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}}.$$

Выпишем несколько первых подходящих дробей:

$$\frac{1}{1};\ 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1};\ 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = \frac{5}{3};$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{7}{4};\ 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{19}{11};$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}}} = \frac{26}{15}.$$

Заметим:

$$1^2 - 3\cdot 1 = -2, \qquad 2^2 - 3\cdot 1^2 = 1,$$

$$5^2 - 3\cdot 3^2 = -2, \qquad 7^2 - 3\cdot 4^2 = 1,$$

$$19^2 - 3\cdot 11^2 = -2, \quad 26^2 - 3\cdot 15^2 = 1,$$

так что половина дробей «лишние» – они дают решения не уравнения $x^2 - 3y^2 = 1$, а уравнения $x^2 - 3y^2 = -2$. (Как вы помните, подходящие дроби числа $\sqrt{2}$ обладают аналогичным свойством.)

Упражнение 64. Если начать с дроби 1/1 или 2/1 и применять правило $\frac{x}{y} \to \frac{x+3y}{x+2y}$, то все дроби, которые будут при этом получены, являются подходящими дробями числа $\sqrt{3}$. Докажите это.

В следующей части статьи мы докажем многие удивительные свойства цепных дробей. В частности, если x/y – подходящая дробь числа ξ, то $\left|\xi - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{y^2}$. Кроме того, если $x^2 - dy^2 = 1$ и x, y – натуральные числа, то x/y – подходящая дробь числа $\sqrt{d}$, так что для поиска решения $(x;\ y)$ уравнения Пелля следует перебирать лишь подходящие дроби числа $\sqrt{d}$. А вот обратное утверждение, как видно на примерах $d = 2$ и $d = 3$, ложно: не каждая подходящая дробь соответствует решению уравнения Пелля.

Вряд ли вам удастся самостоятельно создать теорию цепных дробей. Но поэкспериментировать, разлагая разные числа (и рациональные, и иррациональные) в цепные дроби и вычисляя подходящие дроби, очень полезно. Хотя бы одну-две интересные закономерности обязательно обнаружите! Например, постарайтесь выяснить, как связаны между собой английский метод решения уравнения $x^2 - dy^2 = 1$ и цепная дробь числа $\sqrt{d}$.

(Продолжение следует)