Монотонные функции в конкурсных задачах

А.ЕГОРОВ, Ж.РАББОТ

Метод решения задач, который мы рассмотрим в этой статье, применим как к обычным школьным задачам, так и к более сложным, часто называемым нестандартными.

При изучении школьного курса алгебры и особенно начал математического анализа вам часто приходилось выяснять, возрастает или убывает та или иная функция. Мы постараемся в этой статье показать, что использование монотонности функций, входящих в уравнение или неравенство (иногда вообще не фигурирующих в условии, а появляющихся по ходу решения), нередко сильно упрощает техническую часть решения, а порой без него просто немыслимо решить задачу.

Теорема о корне

Сначала напомним основное определение.

Функция $y=f(x)$ называется *монотонно возрастающей* (*монотонно убывающей*) на некотором промежутке, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1)>f(x_2)$).

Наглядный смысл возрастания или убывания функции прозрачен – график возрастающей функции при движении по нему слева направо идет все выше и выше (а убывающей – все ниже и ниже). Мы, естественно, предполагаем, что оси координат расположены стандартным образом: ось абсцисс Ox горизонтальна и направлена слева направо, а ось ординат Oy вертикальна и направлена снизу вверх.

Если функция возрастает или убывает на некотором промежутке, говорят, что она *монотонна* на этом промежутке.

Первый факт, часто использующийся при решении задач, в том или ином виде доказан в вашем школьном курсе (например, в учебнике для 10–11 классов под редакцией А.Н.Колмогорова он приводится под названием «Теорема о корне» при введении обратных тригонометрических функций в начале 10 класса). Напомним его.

(А) *Пусть функция f возрастает (убывает) на промежутке I, число a – любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x)=a$ имеет единственный корень в промежутке I.*

Нам иногда будет удобнее несколько иная формулировка этого факта.

(А*) *Пусть $y=f(x)$ – монотонная на некотором промежутке функция. Тогда при любом значении a уравнение $f(x)=a$ имеет на этом промежутке не более одного корня.*

Наглядный смысл теоремы о корне (А) и ее переформулировки (А*) также прозрачен – горизонтальная прямая $y=a$ может пересечь график монотонной функции $y=f(x)$ не более чем в одной точке (т.е. либо вообще его не пересекает, либо пересекает в единственной точке).

Начнем с совсем простой задачи.

Задача 1. *Решите уравнение*

$$x^3+x=10\,. \qquad (1)$$

Решение. Сразу заметим, что левая часть данного уравнения – функция, возрастающая на всей числовой прямой (это очень легко доказать). Следовательно, уравнение (1) имеет не более одного корня – теорема (А*). Но корень легко угадать: при $x=2$ левая часть данного уравнения равна правой.

Ответ: $x=2$.

Решим теперь чуть более трудную задачу.

Задача 2. *Решите уравнение*

$$\sqrt{37x+12}-\sqrt{31-6x}=2\,. \qquad (2)$$

Комментарий. Уравнение (2) можно решить стандартным школьным способом, почленно возведя (дважды) промежуточные иррациональные уравнения в квадрат, найдя затем корни полученного квадратного уравнения с многозначными коэффициентами и произведя после этого отсев возможных посторонних решений. Однако задача допускает решение «в одну строчку».

Решение. Левая часть уравнения (2) – возрастающая в своей области определения функция (первый радикал при увеличении x, очевидно, увеличивается, а второй – уменьшается, но он вычитается из первого, поэтому их разность возрастает). По теореме (А*) уравнение (2) имеет не более одного решения. Его легко предъявить: это $x=1$. Действительно, при подстановке этого значения неизвестного в (2) получается верное равенство $7-5=2$.

Ответ: $x=1$.

Замечания. 1. Откуда взялся корень $x=1$? Мы его просто угадали! Некоторые школьники считают приведенное решение «нестрогим» – как это можно что-то угадывать? Но в нашем решении все в порядке – доказано, что решений не больше одного и предъявлено решение (неважно, откуда мы его взяли). Кстати, угадать решение было довольно просто – мы начали перебирать целые неотрицательные значения x и искать, при каких из них «извлекается» второй корень (там просто меньше коэффициенты, чем под знаком первого корня). При $x=0$ корень «не извлекся», а при $x=1$ – извлекся (под корнем получился полный квадрат – число 25), тогда мы подставили $x=1$ в уравнение (2) и получили верное равенство. Начинали мы с $x=0$, так как при отрицательных целых x первый радикал не существует – подкоренное выражение отрицательно. Конечно, угадать корень можно далеко не всегда, но мы и не претендуем на универсальность такого подхода к решению.

2. Насколько строго наше доказательство монотонности левой части уравнения (2)? На наш взгляд, приведенного нами рассуждения вполне достаточно, но при необходимости его легко формализовать. Пусть x_1 и x_2 – произвольные числа из области определения левой части уравнения (2), причем $x_1>x_2$. Введем обозначения:

$$f(x)=\sqrt{37x+12}\,,\ \ g(x)=\sqrt{31-6x}\,.$$

Тогда

$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{37x_1+12}-\sqrt{37x_2+12}=$$

$$= \frac{(37x_1+12)-(37x_2+12)}{\sqrt{37x_1+12}+\sqrt{37x_2+12}} =$$

$$= \frac{37(x_1-x_2)}{\sqrt{37x_1+12}+\sqrt{37x_2+12}} > 0, \text{ т.е. } f(x_1)-f(x_2)>0. \quad (2^*)$$

(Заметим, что, как это нередко бывает при преобразовании выражений, содержащих квадратные радикалы, нам помогло умножение и деление разности корней на сопряженное выражение – сумму этих же квадратных корней.)

Аналогично,

$$g(x_1)-g(x_2) = \frac{-6(x_1-x_2)}{\sqrt{31-6x_1}+\sqrt{31-6x_2}} < 0,$$

$$\text{т.е. } g(x_1)-g(x_2)<0. \quad (2^{**})$$

Наконец, обозначив левую часть уравнения (2), т.е. $f(x)-g(x)$, через $h(x)$ и почленно вычтя из неравенства (2*) неравенство (2**) [1], получим $(f(x_1)-g(x_1))-(f(x_2)-g(x_2))>0$. Но это значит, что $h(x_1)-h(x_2)>0$, т.е. функция $h(x)$ монотонно возрастает, что и утверждалось в нашем решении задачи.

Решая следующие упражнения, потренируйтесь в угадывании корней.

Упражнения

1. Решите уравнения:

а) $2x^3+x-3=0$; б) $x^5+3x^3+4=0$;

в) $2^x+x=6$; г) $\lg x+\sqrt{x-1}=4$.

2. Решите уравнения:

а) $\sqrt{5x+1}+\sqrt{17x+13}=12$;

б) $\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[5]{14x+4}=4$; в) $\sqrt{x}-\sqrt{5-x}=1$.

3. Исследуйте на монотонность функции:

а) $y=x+\frac{1}{x}$ при $x>1$; б) $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$;

в) $y=2^x-3^x$ при $x>0$; г) $y=5^x-3^x$ при $x>0$;

д) $y=\log_3 x-\log_2 x$ при $x<0$, $0<x<1$;

е) $y=a^x-b^x$ при $x<0$ и $0<a<b<1$;

ж) $y=\log_a x-\log_b x$ при $a>b>1$.

Сумма и разность монотонных функций

Сейчас мы сформулируем два важных свойства монотонных функций (мы ими, по существу, уже пользовались).

(В) *а) Сумма возрастающих (убывающих) функций – функция, возрастающая (соответственно, убывающая) на их общей области определения.*

б) Разность возрастающей и убывающей (убывающей и возрастающей) функций – функция, возрастающая (соответственно, убывающая) на их общей области определения.

Упражнение 4. Докажите оба утверждения (В).

Указание. Можно использовать известные вам свойства числовых неравенств.

Понятно, что первое из свойств (В) верно для любого конечного числа складываемых функций.

[1] *Здесь мы используем известное свойство числовых неравенств: неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, сохраняя знак уменьшаемого неравенства (того,* ***из которого*** *вычитают). Вообще, мы советуем повторить свойства неравенств, поскольку ими часто приходится пользоваться при исследовании функций (в частности, на монотонность).*

Задача 3. *Решите уравнение*

$$\sqrt[3]{4x-1}+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[9]{x-6}=6.$$

Комментарий. Конечно, немыслимо решить это уравнение почленным возведением в степень (третью, девятую, причем неоднократно!). Это, как ни странно, сильно облегчает задачу – предостерегает от неправильного пути и заставляет искать другие способы.

Решение. Левая часть данного уравнения – возрастающая функция (см. утверждение (В)). Поэтому, согласно (А*), у него не более одного корня. Решение легко предъявить – это $x=7$: при подстановке его в уравнение получаем $3+2+1=6$, это – верное равенство.

Ответ: $x=7$.

Теперь рассмотрим задачу, для решения которой в указанном духе удобно привлечь идею симметрии (эта задача предлагалась на заочном туре одной из Соросовских олимпиад).

Задача 4. *Решите уравнение*

$$\sqrt{x(x+7)}+\sqrt{(x+7)(x+17)}+$$
$$+\sqrt{(x+17)(x+24)}=12+17\sqrt{2}. \quad (3)$$

Решение. Если записать первое подкоренное выражение в виде $(x+0)(x+7)$ и нанести на числовую ось четыре числа, которые суммируются с неизвестной величиной во всех скобках левой части, мы увидим, что эта система из четырех точек имеет центр симметрии – точку 12 (относительно нее симметрична пара чисел 0 и 24, а также пара 7 и 17). Поэтому замена переменной $t=x+12$ (откуда $x=t-12$) симметризует левую часть уравнения (3), которое примет вид

$$\sqrt{(t-12)(t-5)}+\sqrt{(t-5)(t+5)}+$$
$$+\sqrt{(t+5)(t+12)}=12+17\sqrt{2}. \quad (3^*)$$

Обозначим левую часть уравнения (3*) через $f(t)$. Заметим, что функция $f(t)$ определена в симметричной относительно нуля области

$$\left[\begin{array}{l} t\le -12, \\ t\ge 12 \end{array}\right.$$

и обладает свойством $f(-t)=f(t)$, т.е. является четной. Поэтому достаточно решить уравнение (3*) для $t\ge 12$. Но при этих значениях t каждый из трех трехчленов, стоящих под знаком радикала в левой части (3*), возрастает, значит, возрастают и квадратные корни из этих трехчленов. Поэтому, применив утверждение (В), получим, что при $t\ge 12$ левая часть (3*) – возрастающая функция, а значит, уравнение имеет не более одного корня. Находим подбором, что $t=13$ – корень (подставив это значение t в левую часть уравнения (3*), получим

$$\sqrt{8}+12+5\sqrt{18}=2\sqrt{2}+12+15\sqrt{2}=12+17\sqrt{2},$$

что равно правой части).

Итак, $t=13$, откуда $x=1$. Поскольку $t=-13$ тоже решение уравнения (3*), получаем и второй корень исходного уравнения: $x=-25$.

Ответ: $x_1=1$; $x_2=-25$.

Замечание. Конечно, можно не делать замену переменной, а рассуждать о симметрии левой части относительно $x=12$ и использовать ее монотонность при $x\ge 12$, но это выглядит менее изящно и естественно.

Понятно, что соображения монотонности могут применяться не только при решении уравнений, но и в задачах с неравенствами.

Задача 5. *Решите неравенство*

$$\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{3x-2}<4. \qquad (4)$$

Решение. Найдем область допустимых значений переменной данного неравенства:

$$\begin{cases} x^2+x-2\ge 0,\\ 3x-2\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1.$$

При этих значениях x левая часть (4) – возрастающая функция (вершина параболы – графика квадратного трехчлена $y=x^2+x-2$ – имеет абсциссу $x=-0{,}5$, поэтому при $x\ge 1$ первое подкоренное выражение, а вместе с ним и все первое слагаемое левой части (4), возрастает, второе слагаемое – также возрастающая функция), а правая часть – константа. Поскольку при $x=2$ левая часть (4) равна правой, данное неравенство справедливо при всех допустимых значениях x, меньших 2 (при бо́льших значениях x левая часть (4) больше, чем при $x=2$).

Ответ: $1\le x<2$.

Замечание. Полезно отметить, что мы, по существу, использовали следующее утверждение: *если $y=f(x)$ – функция, возрастающая на промежутке $[a;b]$, то для любого числа c, такого что a < c < b, неравенство $f(x)<f(c)$ равносильно неравенству $a\le x<c$.*

Решим теперь несколько более сложную задачу.

Задача 6. *Решите уравнение*

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}+x=\frac{24}{5}.$$

Решение. Ясно, что отрицательных корней данное уравнение иметь не может (при отрицательных значениях x его левая часть отрицательна, а правая – положительна). Не очень сложно угадать один его корень: $x=4$. Покажем, что других корней нет. Для этого убедимся в том, что функция $y=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ возрастает при положительных значениях x. Действительно, при таких x справедливо равенство $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{9}{x^2}}}$. Дальше рассуждаем стандартным образом: подкоренное выражение в знаменателе последней дроби при $x>0$ убывает, поэтому и сам знаменатель убывает, но тогда дробь возрастает – ее числитель не меняется, а знаменатель убывает.

Ответ: $x=4$.

Замечание. Очень важно научиться легко ориентироваться в подобных ситуациях: что будет с дробью, если ее числитель растет, а знаменатель убывает и при этом (очень важно!) они положительны (или отрицательны); числитель убывает, знаменатель растет и т.п.

Упражнения

5. Исследуйте на монотонность функции:

а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; б) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; в) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

6. Решите уравнения и неравенства:

а) $\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-3}=\sqrt{3}$;

б) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; в) $4^x-3^x=37$;

г) $x^{10}+\sqrt{x-1}\ge 33$; д) $x^5+x^3+2\sqrt{x}\ge 4$;

е) $2^{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}<1$.

«Встречная» монотонность

Приведем теперь еще одну очевидную, но часто употребляющуюся переформулировку теоремы (А) о корне (ее иногда называют теоремой о «встречной» монотонности).

(А**) *Пусть функция $y=f(x)$ возрастает на промежутке I, а функция $y=g(x)$ убывает на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x)=g(x)$ имеет на промежутке I не более одного корня.*

Задача 7. *Решите уравнение*

$$x^2-x+2=\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}. \qquad (5)$$

Решение. Правая часть уравнения (5) – функция, убывающая на своей области определения, т.е. при всех значениях $x\ge 1$:

$$\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}=\frac{(x+7)-(x-1)}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}}=\frac{8}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}};$$

очевидно, что дробь, у которой числитель постоянен, а знаменатель возрастает, убывает. С другой стороны, при $x\ge 1$ квадратный трехчлен, стоящий в левой части уравнения (5), возрастает, так как вершина его графика, параболы, имеет абсциссу, равную 0,5, а ее ветви направлены вверх. Таким образом, у нас имеется ситуация, описанная в утверждении (А**), и уравнение (5) имеет не более одного корня. Но при $x=2$ левая часть (5) равна правой.

Ответ: $x=2$.

Задача 8. *Решите неравенство*

$$3^x-7>4^{\frac{1}{x}}.$$

Решение. Очевидно, при $x<0$ неравенство решений не имеет: его левая часть отрицательна, а правая – положительна; $x=0$ – тоже не решение. Пусть теперь $x>0$. Тогда левая часть данного неравенства возрастает, а правая – убывает (с ростом x показатель степени убывает) – опять «встречная» монотонность. При $x=2$ левая часть равна правой (и равна 2). Поэтому при $x>2$ левая часть больше двух, а правая часть меньше двух, и данное неравенство будет выполнено. При $0<x<2$ левая часть меньше двух, а правая – больше, так что эти значения x не являются решениями.

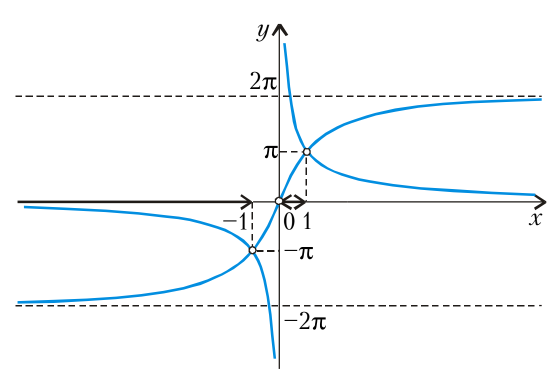
Ответ: $x>2$.

Задача 9. *Решите неравенство*

$$4\operatorname{arctg} x<\frac{\pi}{x}.$$

Решение. Функция $y=4\operatorname{arctg} x$ возрастает на всей числовой оси. Функция $y=\dfrac{\pi}{x}$ убывает и при $x<0$, и при $x>0$. Поэтому рассмотрим отдельно отрицательные и положительные значения x. На каждом из этих множеств имеется «встречная» монотонность (см. рисунок). Корни соответствующего уравнения угадываются легко: $x=\pm 1$ (можно воспользоваться и нечетностью левой и правой частей).

Ответ: $x<-1$, $0<x<1$.



Замечание. Обратите внимание на то, что мы рассматривали отдельно два промежутка монотонности правой части. Дело в том, что все наши рассуждения верны лишь на общем промежутке монотонности двух функций. Если бы мы забыли, что правая часть монотонна не на всей числовой прямой, а лишь на полуосях оси абсцисс, произошла бы ошибка; например, «при $x = 1$ левая и правая части равны, левая часть возрастает, правая – убывает, поэтому при всех $x < 1$, $x \neq 0$ неравенство верно».

Упражнение 7. Решите уравнения и неравенства:

а) $2\sqrt[3]{x^2+x-1} = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}$;

б) $4^{\frac{1}{x}} - 1 = 3^{2x-1}$; в) $\log_3\left(1+\sqrt{x}\right) = 5 - x$;

г) $\log_2 x - \log_3 x = \sqrt{1-x}$; д) $\arcsin x < \arccos x$.

Преобразование к монотонным функциям

Во всех рассмотренных ранее задачах мы имели дело с монотонными левыми и правыми частями уравнений и неравенств, причем это была «нужная» монотонность – либо «встречная», либо с одной стороны монотонная функция, а с другой – константа. Чаще встречается ситуация, когда надо предварительно привести данное соотношение к такому виду, чтобы получились удобные для приведенных нами рассуждений функции. Вот классический пример такой задачи.

Задача 10. *Решите уравнение*

$$3^x + 4^x = 5^x. \qquad (6)$$

Комментарий. Конечно, корень $x = 2$ «виден» сразу (вы, наверное, помните «египетский» прямоугольный треугольник), но доказать его единственность аналогично предыдущим случаям не удается: ведь в уравнении (6) и левая, и правая части возрастают, и применять к этому уравнению утверждение (А**) мы не можем. Но с этой ситуацией в нашем случае легко справиться.

Решение. Разделив обе части уравнения (6) на не равную нулю (и даже положительную) при всех значениях x функцию 5^x, приходим к уравнению

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1, \qquad (6^*)$$

у которого левая часть убывает, а в правой – константа. По теореме (А) уравнение (6*) имеет не более одного корня, но $x = 2$ – корень.

Ответ: $x = 2$.

К рассмотренной задаче примыкает и следующая, чуть более сложная задача.

Задача 11. *Пусть положительные числа a, b и c при некотором положительном k удовлетворяют соотношению*

$$a^k + b^k = c^k. \qquad (7)$$

а) При каких значениях k существует треугольник со сторонами a, b и c?

б) Выясните, как зависит от k вид треугольника со сторонами a, b и c, когда он существует.

Комментарий. Конечно, мы должны преобразовать уравнение в духе решения задачи 10 и воспользоваться монотонностью левой части полученного уравнения. Кроме того, мы используем тот факт, что если c – наибольшее из трех данных чисел, то для существования искомого треугольника необходимо и достаточно выполнение неравенства $c < a + b$. Для решения пункта б) вспомним, что треугольник со сторонами a, b, c, где сторона c – наибольшая, *остроугольный*, если $a^2 + b^2 > c^2$, *прямоугольный*, если $a^2 + b^2 = c^2$, *тупоугольный* – если $a^2 + b^2 < c^2$ (это вытекает, например, из теоремы косинусов).

Решение. Ясно, что c – наибольшее из трех данных чисел, ведь $c^k = a^k + b^k > a^k$, откуда $\left(\frac{c}{a}\right)^k > 1$, поэтому $\frac{c}{a} > 1$, т.е. $c > a$; аналогично, $c > b$. Далее, разделив обе части данного уравнения на положительное число c^k, получим

$$\left(\frac{a}{c}\right)^k + \left(\frac{b}{c}\right)^k = 1. \qquad (7^*)$$

а) В левой части уравнения (7*) стоит сумма монотонно убывающих функций, поэтому при $k \le 1$ одновременно выполняются неравенства $\left(\frac{a}{c}\right)^k \ge \frac{a}{c}$ и $\left(\frac{b}{c}\right)^k \ge \frac{b}{c}$. Складывая полученные неравенства и используя уравнение (7*), получаем, что при этих значениях k

$$1 = \left(\frac{a}{c}\right)^k + \left(\frac{b}{c}\right)^k \ge \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \text{ т.е. } a + b \le c.$$

Итак, при $0 < k \le 1$ треугольник со сторонами a, b и c не существует.

Осталось рассмотреть $k > 1$. В этом случае из монотонного убывания слагаемых левой части уравнения (7*) вытекает, что одновременно выполняются неравенства $\left(\frac{a}{c}\right)^k < \frac{a}{c}$ и $\left(\frac{b}{c}\right)^k < \frac{b}{c}$, откуда аналогично получим, что $a + b > c$, т.е. треугольник существует.

б) Снова воспользуемся монотонным убыванием слагаемых, стоящих в левой части уравнения (7*), только теперь нам надо сравнивать k не с единицей, как в пункте а), а с числом 2 (см. комментарий); при этом, конечно, не будем забывать, что теперь у нас $k > 1$ (ведь треугольник с данными сторонами существует).

Если $1 < k < 2$, одновременно выполняются неравенства $\left(\frac{a}{c}\right)^2 < \left(\frac{a}{c}\right)^k$ и $\left(\frac{b}{c}\right)^2 < \left(\frac{b}{c}\right)^k$. Сложив почленно эти неравенства, получаем, что при этих значениях k выполнено неравенство $a^2 + b^2 < c^2$, т.е. треугольник тупоугольный. Аналогично рассматриваются два остальных случая.

Ответ: а) при $k > 1$; б) при $1 < k < 2$ треугольник тупоугольный, при $k = 2$ – прямоугольный, при $k > 2$ – остроугольный.

Приведем две задачи, где не только обнаружить, но и доказать монотонность довольно сложно. При этом по традиции, сложившейся на вступительных экзаменах в МГУ, где давались эти задачи (факультет психологии, 1982 г., и химический факультет, 1998 г.), мы постараемся обойтись без использования производной (ее применение, конечно, не запрещено, но задачи составляются так, чтобы можно было обосновать монотонность непосредственно).

Задача 12. *Решите уравнение*

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2 + 2x - 2\right) = \log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2 + 2x - 3\right). \qquad (8)$$

Комментарий. Поскольку под знаком логарифма стоят квадратные трехчлены с положительным старшим коэффициентом, ни о какой монотонности в таком виде не может быть и речи. С другой стороны, эти трехчлены, а также основания логарифмов очень «похожи», как-то связаны друг с другом, так что попробуем удачно преобразовать основания и сделать хорошую замену переменной. Обратите внимание на то, как мы далее получим монотонную функцию, и постарайтесь освоить этот прием.

Решение. Во-первых, очевидно, что $x^2+2x-2=\left(x^2+2x-3\right)+1$, так что, если обозначить x^2+2x-3 через t, то $x^2+2x-2=t+1$.

Во-вторых, заметим, что

$$2\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{1+\left(7+4\sqrt{3}\right)}=\sqrt{1+\left(2+\sqrt{3}\right)^2},$$

поэтому, если обозначить $7+4\sqrt{3}$ через a, можно провести следующую цепочку равносильных в области определения преобразований данного уравнения (конечно, с учетом введенных обозначений):

$$(8)\Leftrightarrow \log_{\sqrt{1+a}}(t+1)=\log_{\sqrt{a}}t\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{a+1}(t+1)=\log_a t\,. \qquad (8^*)$$

Заметим теперь, что, очевидно, $a=7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2>1$, $t>0$ (иначе не существует логарифм в правой части (8*), поэтому $t+1>1$, но тогда $t>1$ (в противном случае левая часть уравнения (8*) положительна, а правая – отрицательна). Итак, мы пришли к уравнению (8*), где $t>1$, $a>1$.

Перейдем в уравнении (8*) к новому основанию логарифмов, например к основанию 2:

$$(8^*)\Leftrightarrow\frac{\log_2(t+1)}{\log_2(a+1)}=\frac{\log_2 t}{\log_2 a}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\log_2(t+1)}{\log_2 t}=\frac{\log_2(a+1)}{\log_2 a}\,. \qquad (8^{**})$$

Пусть $f(z)=\dfrac{\log_2(z+1)}{\log_2 z}$, тогда, как легко видеть, уравнение (8**) можно записать в виде

$$f(t)=f(a)\,. \qquad (8^{***})$$

Это уравнение имеет очевидный корень $t=a$. Если нам удастся доказать, что функция $y=f(z)$ монотонна при $z>1$, из этого будет следовать (теорема о корне), что других решений нет. Докажем это.

Для этого достаточно заметить, что при всех k, кроме нуля, выполняется равенство $k+1=k\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$. Поэтому при всех допустимых в нашей задаче значениях z (т.е. при $z>1$)

$$f(z)=\frac{\log_2(z+1)}{\log_2 z}=$$

$$=\frac{\log_2\left(z\left(1+\frac{1}{z}\right)\right)}{\log_2 z}=\frac{\log_2 z+\log_2\left(1+\frac{1}{z}\right)}{\log_2 z}=1+\frac{\log_2\left(1+\frac{1}{z}\right)}{\log_2 z}.$$

При $z>1$ сумма $1+(1/z)$, очевидно, убывает; логарифм по основанию 2 – возрастающая функция, т.е. числитель последней дроби в последнем равенстве убывает, а знаменатель возрастает. А так как они при этом еще и положительны, эта дробь убывает с ростом z.

Таким образом, функция $y=f(z)$ убывает при $z>1$, и уравнение (8***) имеет единственное решение $t=a$. Осталось найти корни исходного уравнения (8):

$$x^2+2x-3=7+4\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{11+4\sqrt{3}}\,.$$

Ответ: $x=-1\pm\sqrt{11+4\sqrt{3}}$.

В решении последней задачи нам встретились важные соображения, которые мы сформулируем в виде следующих утверждений.

(C) *а) Если числитель и знаменатель дроби положительны, числитель убывает (возрастает), а знаменатель возрастает (соответственно, убывает), то дробь убывает (возрастает).* (См. также замечание после решения задачи 6.)

б) Если функция $y=g(x)$ определена и возрастает (убывает) на промежутке I, а функция $z=f(y)$ определена и возрастает на промежутке I_1, содержащем область значений функции g, то сложная функция $y=f(g(x))$ определена и возрастает (соответственно, убывает) на промежутке I.

Задача 13. *Решите уравнение*

$$\log_2(4x+1)\cdot\log_5(4x+4)+\log_3(4x+2)\cdot\log_4(4x+3)=$$
$$=2\log_3(4x+2)\cdot\log_5(4x+4)\,. \qquad (9)$$

Решение. Сделаем замену переменной $t=4x+1$ и, разбив правую часть данного уравнения на два одинаковых слагаемых, преобразуем уравнение (9) так, чтобы можно было разложить левую и правую части нового уравнения на множители:

$$\log_2 t\cdot\log_5(t+3)-\log_3(t+1)\cdot\log_5(t+3)=$$
$$=\log_3(t+1)\cdot\log_5(t+3)-\log_3(t+1)\cdot\log_4(t+2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\log_5(t+3)\cdot\left(\log_2 t-\log_3(t+1)\right)=$$
$$=\log_3(t+1)\cdot\left(\log_5(t+3)-\log_4(t+2)\right)\,. \qquad (9^*)$$

Заметим теперь, что уравнение (9*) имеет корень $t=2$ (это число обращает в нули скобки в его правой и левой частях), и попробуем показать, что других корней оно (а вместе с ним и данное уравнение) не имеет.

Рассмотрим функцию $f(z)=\log_a z-\log_{a+1}(z+1)$, где $a>1$, и докажем ее монотонность. Для этого преобразуем разность логарифмов, перейдя во втором логарифме к основанию a и используя для представления суммы $(z+1)$ тот же прием, что в предыдущей задаче:

$$f(z)=\log_a z-\frac{\log_a(z+1)}{\log_a(a+1)}=$$

$$=\log_a z-\frac{\log_a\left(z\left(1+\frac{1}{z}\right)\right)}{\log_a(a+1)}=\log_a z-\frac{\log_a+\log_a\left(1+\frac{1}{z}\right)}{\log_a(a+1)}=$$

$$=\left(\log_a z-\frac{\log_a z}{\log_a(a+1)}\right)-\frac{\log_a\left(1+\frac{1}{z}\right)}{\log_a(a+1)}=$$

$$=\log_a z\left(1-\log_{a+1}a\right)-\log_{a+1}\left(1+\frac{1}{z}\right).$$

Заметим теперь, что функцию $f(z)$ нам удалось представить как разность возрастающей функции $\log_a z\left(1-\log_{a+1}a\right)$ (она возрастает, так как $\log_{a+1}a<1$, поэтому $1-\log_{a+1}a>0$ и функция $\log_a z$ возрастает – по условию, $a>1$) и убывающей функции $\log_{a+1}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)$. Поэтому (см. утверждение (В)) функция $f(z)$ возрастает.

Осталось заметить, что первый множитель в левой части уравнения (9*) положителен при всех допустимых значениях t (т.е. при всех $t>0$), а второй множитель – это функция $f(z)$ при $a=2$, а раз она возрастает и равна, как мы видели, нулю при $t=2$, то левая часть уравнения (9*) отрицательна при $t<2$ и положительна при $t>2$. Первый множитель правой части уравнения (9*) также положителен при всех $t>0$, а второй множитель – это взятая со знаком минус функция $f(z)$ при $a=4$. Поэтому при всех допустимых значениях t, кроме $t=2$, левая и правая части уравнения (9*) имеют разные знаки, и их значения не могут совпадать, т.е.

это уравнение имеет единственный корень $t = 2$. Отсюда получаем ответ.

Ответ: $x = 1/4$.

Теперь привлечем соображения монотонности к решению системы уравнений.

Задача 14. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6, \\ x^6 + x^2 = 8y^3 + 2y. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что пара $x = 0$, $y = 0$ – решение данной системы. Если же $y \neq 0$, то и $x \neq 0$. Перепишем первое уравнение так:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y .$$

Поскольку функция $f(t) = t^5 + t$ возрастающая, из полученного равенства следует, что

$$\frac{x}{y} = y \text{, т.е. } x = y^2 .$$

Аналогично, из возрастания функции $g(t) = t^3 + t$ следует, что второе уравнение системы равносильно уравнению

$$x^2 = 2y .$$

Осталось решить систему

$$\begin{cases} x = y^2, \\ x^2 = 2y. \end{cases}$$

Ответ: $\left(2\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2}\right)$.

Упражнения

8. Решите уравнения:

а) $(2x+1)\left(2 + \sqrt{(2x+1)^2 + 3}\right) + 3x\left(2 + \sqrt{9x^2 + 3}\right) = 0$;

б) $\log_2(3x+1) \cdot \log_5(x+4) +$
$+ \log_3(3x+2) \cdot \log_4(3x+3) = 2\log_3(3x+2) \cdot \log_5(3x+4)$.

9. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + \sin x = y + \sin y, \\ x^2 + 3xy + y^2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^5 + x = y + \sqrt[5]{y}, \\ 2x^3 = 3y^2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2^x + x = y + \log_2 y, \\ \log_2 x + y = 5. \end{cases}$

10. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$4^{-|x-a|} \log_{\sqrt{3}}\left(x^2 - 2x + 3\right) + 2^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{3}}\left(2|x-a| + 2\right) = 0$$

имеет ровно три корня.

11. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{a}}\left(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1\right)\log_5\left(x^2 + ax + 6\right) + \log_a 3 \geq 0$$

имеет единственное решение.

Монотонность и метод интервалов

Здесь мы рассмотрим метод решения неравенств, представляющий собой некоторое усовершенствование метода интервалов. Именно, в задачах, где существенным является знак функции, можно заменять разность значений монотонных функций разностями значений их аргументов. Это позволяет решать довольно сложные неравенства сравнительно просто – методом интервалов, применяемым обычно к рациональным функциям.

Для обоснования указанной замены мы переформулируем определение возрастающей функции, приведенное в самом начале этой статьи. Надеемся, что доказательство эквивалентности этих определений не составит для вас особого труда.

Функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке I тогда и только тогда, когда для любых u и v из этого промежутка знаки чисел $f(u) - f(v)$ и $u - v$ совпадают (соответственно, противоположны).

Это замечание позволяет в целом ряде задач, связанных с исследованием знака функций, заменить разность $f(u) - f(v)$ на более простое выражение $u - v$.

Для решения конкретных задач полезно помнить, что знаки чисел $a^2 - b^2$ и $a - b$ при положительных a и b совпадают, а при отрицательных – противоположны (подумайте, что можно сказать, если знаки a и b противоположны, а также – если рассматривать не квадраты, а любые положительные степени!). Одинаковы будут также знаки чисел $2^u - 2^v$ и $u - v$, $\log_2 u - \log_2 v$ и $u - v$, $\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg} v$ и $u - v$, а вот знаки чисел $\log_{0,5} u - \log_{0,5} v$ и $u - v$ противоположны.

Упражнение 12. Докажите, что совпадают знаки следующих чисел:

а) $|u| - |v|$ и $u^2 - v^2$; б) $\sqrt{u} - \sqrt{v}$ и $u - v$;

в) $a^u - a^v$ и $(u - v)(a - 1)$; г) $\log_a u - \log_a v$ и $(u - v)(a - 1)$;

д) $a^x - b$ и $(x - \log_a b)(a - 1)$; е) $\log_a x - b$ и $\left(x - a^b\right)(a - 1)$.

Рассмотрим теперь несколько примеров.

Задача 15. *Решите неравенство*

$$\frac{\sqrt{2 - x} + 4x - 3}{x} \geq 2 .$$

Решение. Область определения данного неравенства описывается системой

$$\begin{cases} x \leq 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Поскольку мы хотели бы применить метод интервалов, перенесем число 2 в левую часть неравенства, приведем ее к общему знаменателю:

$$\frac{\sqrt{2 - x} + 2x - 3}{x} \geq 0 . \qquad (10)$$

Неравенство (10), очевидно, справедливо при $x \geq \frac{3}{2}$. При $x < \frac{3}{2}$ запишем его так:

$$\frac{\sqrt{2 - x} - \sqrt{(3 - x)^2}}{x} \geq 0 . \qquad (10^*)$$

В неравенстве (10*) заменим разность корней разностью подкоренных выражений:

$$\frac{2 - x - (3 - x)^2}{x} \geq 0 ,$$

т.е.

$$\frac{4x^2 - 11x + 7}{x} \leq 0 .$$

Решив последнее неравенство методом интервалов, получаем ответ.

Ответ: $x < 2$; $1 \leq x < 2$.

Замечание. Как это нередко бывает, для решения задачи методом интервалов мы могли использовать разные функции. Например, мы могли рассуждать так: разность положительных чисел $\sqrt{2 - x}$ и $\sqrt{(3 - 2x)^2}$ имеет тот же знак, что и разность их квадратов, а дальше все аналогично.

Применение монотонности упрощает и решение следующей задачи.

Задача 16. *Решите неравенство*

$$\log_{|x|}(x + 2) < 2 .$$

Решение. Сначала находим допустимые значения:

$$\begin{cases} x+2>0, \\ |x|>0, \\ |x|\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ x\neq 0, \\ x\neq \pm 1. \end{cases}$$

При этих значениях x, перенеся число 2 в левую часть данного неравенства, можно переписать его в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{cases} \log_{|x|}(x+2)-\log_{|x|}x^2<0, \\ x>-2;\ x\neq 0;\ x\neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+2-x^2\right)\left(|x|-1\right)<0, \\ x>-2;\ x\neq 0;\ x\neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+2-x^2\right)\left(x^2-1\right)<0, \\ x>-2;\ x\neq 0;\ x\neq \pm 1. \end{cases}$$

Первое преобразование выполнено в силу соотношений упражнения 12,*г*), а второе – упражнения 12,*а*). Осталось решить полученную систему.

Ответ: $-2<x<-1$; $-1<x<0$; $0<x<1$; $x<2$.

В заключение рассмотрим еще один пример на неравенство с логарифмами. Здесь мы еще раз убедимся в том, насколько сведение к методу интервалов сокращает объем решения.

Задача 17. *Решите неравенство*

$$\left(\log_{3x-1}(2x)-1\right)\left(\log_x(3-x)-1\right)>0.$$

Решение. Найдем область определения неравенства: $\frac{1}{3}<x<3$; $x\neq\frac{2}{3}$; $x\neq 1$. В области определения знаки скобок левой части в силу упражнения 12,*г*) совпадают со знаками соответствующих выражений, что приводит к легко решаемой системе:

$$\begin{cases} (1-x)(3x-2)(3-2x)(x-1)>0, \\ \frac{1}{3}<x<3;\ x\neq\frac{2}{3};\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2(3x-2)(2x-3)>0, \\ \frac{1}{3}<x<3;\ x\neq\frac{2}{3};\ x\neq 1. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}<x<3$.

При решении следующего упражнения вам могут помочь результаты предыдущего.

Упражнение 13. Решите неравенства:

а) $\dfrac{\left|x^2-2x\right|-2x-1}{x^2-2+\left|x^2+3x\right|}\geq 0$;

б) $\dfrac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{\left|x^2-6x+5\right|-\left|x^2-2x-3\right|}\leq 0$;

в) $\dfrac{\sqrt{x^2-5}-3}{|x+4|-7}\geq 1$;

г) $\dfrac{16-3x+\sqrt{x^2-3x-4}}{6-x}\geq 1$;

д) $\log_{x-2}x\leq\log_{x-2}4$;

е) $\log_x\left(\dfrac{1}{\log_4\left(3\cdot 2^{\frac{1}{x}}+4\right)}\right)\leq 1$;

ж) $\dfrac{\log_{21+4x-x^2}(7-x)}{\log_{x+3}\left(21+4x-x^2\right)}<\dfrac{1}{4}$.