

Великомученик Петя

И. АКУЛИЧ

РАССМОТРИМ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА a И b . КАК ИЗВЕСТНО, ИХ СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ — ЭТО $\frac{a+b}{2}$, А СРЕДНЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ — ЧИСЛО \sqrt{ab} . ЧУТЬ МЕНЬШЕЙ ИЗВЕСТНОСТЬЮ ПОЛЬЗУЕТСЯ СРЕДНЕЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ: $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$. Очевидно, что

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab,$$

т.е. произведение среднего арифметического и среднего гармонического равно произведению самих чисел a и b .

В 1999 году А.Канель понял, что из этого можно

«слепить» неплохую задачу для олимпиады, примерно такую:

Пусть $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ и для любого натурального n числа a_n и b_n — соответственно, среднее арифметическое и среднее гармоническое чисел a_{n-1} и b_{n-1} . Найдите произведение $a_{1999}b_{1999}$.

Решение состоит в том, что произведение $a_n b_n$ одно и то же для всех n , поэтому $a_{1999}b_{1999} = a_0 b_0 = 2$.

Но автор, видимо, решил, что условие выглядит скучновато, и «оживил» его:

На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифмети-



ческое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2. Найдите произведение чисел, которые Петя напишет вечером 1999-го дня.

В таком виде задачу предложили девятиклассникам на LXII Московской олимпиаде. Вроде бы задача отличается от первоначальной лишь появлением лишней сюжетной линии, а по сути эквивалентна первоначальной. Но давайте проследим за действиями старшего научного сотрудника. В первый день он напишет на доске числа $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ и $\frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{1+2} = \frac{4}{3}$. Во второй день —

числа $\frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{17}{12}$ и $\frac{2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}}{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}} = \frac{24}{17}$. Впрочем, что это мы

среднее гармоническое вычисляем? Вы же помните, что произведение среднего арифметического и среднего гармонического равно 2. Так что дальше можно вычислять только среднее арифметическое. На третий день (проверьте, если сомневаетесь!) на доске ока-

жутся числа $\frac{577}{408}$ и $\frac{816}{577}$, на четвертый — $\frac{665857}{470832}$ и $\frac{941664}{665857}$, на пятый — $\frac{886731088897}{627013566048}$ и $\frac{1254027132096}{886731088897}$, на шестой —

$$\frac{1572584048032918633353217}{111984844349868137938112}$$

и

$$\frac{2223969688699736275876224}{1572584048032918633353217}$$

Дальше цифр будет еще больше ...

Петя, конечно, может воспользоваться компьютером — старший научный сотрудник все-таки. Но интересно, сможет ли Петя выписывать числа, т.е. хватит ли ему места на доске? И всегда ли сможет компьютер подсчитать эти числа? Уж больно быстро они возрастают...

Читатель, наверное, уже предчувствует ответ. Но

убедиться не мешает. Запишем число a_n в виде несократимой дроби:

$$a_n = \frac{p_n}{q_n}.$$

Тогда

$$b_n = \frac{2q_n}{p_n},$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\frac{p_n}{q_n} + \frac{2q_n}{p_n}}{2} = \frac{p_n^2 + 2q_n^2}{2p_nq_n},$$

$$b_{n+1} = \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{4p_nq_n}{p_n^2 + 2q_n^2}.$$

Таким образом, $p_{n+1} = p_n^2 + 2q_n^2 > p_n^2$. Оценка, заметьте, довольно грубая (по индукции можно доказать¹, что $p_n^2 - 2q_n^2 = 1$, так что на самом деле $p_{n+1} = 2p_n^2 - 1$). Мы уже знаем, что $p_6 > 10^{24}$. Значит, $p_7 > 10^{48}$, $p_8 > 10^{96}$, ...
..., $p_{1999} > 10^{24 \cdot 2^{1993}}$. Поскольку $2^{10} = 1024 > 1000$, то

$$24 \cdot 2^{1993} = 24 \cdot 2^3 \cdot 2^{10 \cdot 199} > 192 \cdot 1000^{199} > 10^{599}.$$

Значит, числитель дроби, которую Петя должен написать на доске на 1999-й день, будет содержать более 10^{599} цифр. Сказать, что это число очень большое, — значит ничего не сказать. Оно несусветно большое. Даже если Петя будет выписывать миллиард цифр в секунду, то ему потребуется более 10^{590} секунд. Поскольку

$$60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 366 = 31622400 < 40000000,$$

то Пете понадобится более 10^{582} лет для того, чтобы выписать один только этот числитель...

¹ Об этом и многом другом можно прочитать в статье В.Сендерова и А.Спивака «Уравнения Пелля» в «Кванте» №3.