

сжать воздух, чтобы шарик поднялся вверх? Молярная масса воздуха $M = 29$ г/моль.

5. В вертикально расположенном цилиндре под поршнем находится $m = 160$ г кислорода. Поршень подвешен на пружине. Высота столба кислорода под поршнем при температуре $t = 17$ °С равна $h = 60$ см, пружина не деформирована. При нагревании цилиндра на $\Delta t = 100$ °С поршень поднялся на $\Delta h = 20$ см. Определите жесткость пружины.

6. Батарея из $n = 10$ последовательно соединенных конденсаторов емкостью $C = 1,2$ мкФ каждый поддерживается при постоянном напряжении $U = 300$ В. Один из конденсаторов пробивается. Определите работу источника напряжения.

7. Определите ЭДС элемента, если известно, что при увеличении внешнего сопротивления в $n = 3$ раза разность потенциалов на его зажимах, ранее равная $U = 3$ В, увеличивается на $k = 20\%$.

8. Трансформатор, погруженный в масло, вследствие перегрузки начинает греться. Определите КПД трансформатора, если при полной мощности $P_1 = 60$ кВт масло массой $m = 40$ кг нагрелось за время $\tau = 4$ мин на $\Delta t = 20$ °С. Удельная теплоемкость масла $c = 210$ Дж/(кг · К).

9. Квадратный контур находится в однородном магнитном поле с индукцией, равной $B = 3,4$ мТл и перпендикулярной плоскости контура. Затем его изгибают в прямоугольник с соотношением сторон $1 : 2$. При этом по контуру протекает заряд $q = 1,7$ мкКл. Определите длину провода сопротивлением $R = 0,8$ Ом, из которого изготовлен контур.

10. Линза с фокусным расстоянием $F = 30$ см вплотную прилегает к плоскому зеркалу. На расстоянии $d = 20$ см перед линзой помещен предмет высотой $h = 2$ см. Определите, где находится изображение предмета и какова высота этого изображения.

*Публикацию подготовили
С.Кашина, Ю.Колмаков*

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2 \sin 2x \sin x} = \sqrt{5 \cos x + 4 \sin 2x}.$$

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 2x^2 + 1 + \frac{6}{x}$$

на отрезке $[0,5; 1,5]$.

3. Решите неравенство

$$\frac{(21x - 98 - x^2) \log_{0,5}(x + 12)}{x + 21} \leq 0.$$

4. Бригада должна изготовить 300 приборов с заданной ежедневной нормой. Если бригада будет изготавливать ежедневно на 5 приборов больше нормы, то ей потребуется на 8 дней меньше, чем в том случае, если она будет изготавливать ежедневно на 5 приборов меньше нормы. Сколько приборов в день должна изготавливать бригада по норме?

5. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат со стороной 2, а боковое ребро равно 4. Найдите радиус шара с центром в точке O_1 ,

касающегося плоскости KLB_1 , где O_1 – центр грани $A_1 B_1 C_1 D_1$, K и L – середины ребер AA_1 и CC_1 .

Вариант 2

(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\sin 3x + \cos x - \sin x} = \sqrt{\cos x - \sin 2x}.$$

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 3x + 36x^{-1} + 64x^{-3}$$

на отрезке $[2; 6]$.

3. Решите неравенство

$$\log_{7-x} \left(3 - \frac{1}{x-1} \right) + \log_{7-x} \frac{1}{x} \geq 0.$$

4. Покупатель купил электрический кабель в первом магазине на 300 руб. Если бы он покупал кабель во втором магазине, то заплатил бы за каждый метр на 5 руб. меньше, чем в первом, а в третьем – на 5 руб. больше, чем в первом. При этом за те же деньги он купил бы во втором магазине на 8 метров кабеля больше, чем в третьем магазине. Сколько стоит метр кабеля в первом магазине?

5. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат со стороной 12, а боковое ребро равно 6. Найдите радиус шара с центром в точке B , касающегося плоскости ACB_1 .

Вариант 3

(физический факультет)

1. Страна основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , а плоский угол при вершине пирамиды равен α . Определите объем пирамиды.

2. Решите уравнение

$$\cos 2x - \cos 4x + \cos 6x = 1.$$

3. Решите уравнение

$$\log_3(2 + 3^{-x}) = x + 1.$$

4. Решите уравнение

$$\log_2 x - \log_4 x + \log_{16} x = \frac{3}{4}.$$

5. Исследуйте на возрастание и убывание функцию

$$y = (x + 1)^3 (2x - 3).$$

Вариант 4

(химический факультет)

1. Найдите площадь прямоугольной трапеции с острым углом α и радиусом вписанного в нее круга r .

2. Решите уравнение

$$\sin x + \cos x = 1.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{x} + 1} > 2^{-\frac{1}{x+1}}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{1}{5 - 4 \lg x} + \frac{4}{1 + \lg x} = 3.$$

5. Составьте уравнение касательной к графику функции

$$f(x) = \frac{x(x-2)}{x^2+1}$$

в точке с абсциссой $x_0 = 0$.