это уравнение имеет единственный корень $t = 2$. Отсюда получаем ответ.

Ответ: $x = 1/4$.

Теперь привлечем соображения монотонности к решению системы уравнений.

Задача 14. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6, \\ x^6 + x^2 = 8y^3 + 2y. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что пара $x = 0$, $y = 0$ – решение данной системы. Если же $y \neq 0$, то и $x \neq 0$. Перепишем первое уравнение так:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y.$$

Поскольку функция $f(t) = t^5 + t$ возрастающая, из полученного равенства следует, что

$$\frac{x}{y} = y, \text{ т.е. } x = y^2.$$

Аналогично, из возрастания функции $g(t) = t^3 + t$ следует, что второе уравнение системы равносильно уравнению

$$x^2 = 2y.$$

Осталось решить систему

$$\begin{cases} x = y^2, \\ x^2 = 2y. \end{cases}$$

Ответ: $\left(2\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2}\right)$.

Упражнения

8. Решите уравнения:

а) $(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right) + 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right) = 0$;

б) $\log_2(3x+1)\cdot\log_5(x+4) +$
$+ \log_3(3x+2)\cdot\log_4(3x+3) = 2\log_3(3x+2)\cdot\log_5(3x+4)$.

9. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + \sin x = y + \sin y, \\ x^2 + 3xy + y^2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^5 + x = y + \sqrt[5]{y}, \\ 2x^3 = 3y^2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2^x + x = y + \log_2 y, \\ \log_2 x + y = 5. \end{cases}$

10. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$4^{-|x-a|}\log_{\sqrt{3}}\left(x^2 - 2x + 3\right) + 2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{3}}\left(2|x-a|+2\right) = 0$$

имеет ровно три корня.

11. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{a}}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)\log_5\left(x^2+ax+6\right) + \log_a 3 \geq 0$$

имеет единственное решение.

Монотонность и метод интервалов

Здесь мы рассмотрим метод решения неравенств, представляющий собой некоторое усовершенствование метода интервалов. Именно, в задачах, где существенным является знак функции, можно заменять разность значений монотонных функций разностями значений их аргументов. Это позволяет решать довольно сложные неравенства сравнительно просто – методом интервалов, применяемым обычно к рациональным функциям.

Для обоснования указанной замены мы переформулируем определение возрастающей функции, приведенное в самом начале этой статьи. Надеемся, что доказательство эквивалентности этих определений не составит для вас особого труда.

Функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке I тогда и только тогда, когда для любых u и v из этого промежутка знаки чисел $f(u) - f(v)$ и $u - v$ совпадают (соответственно, противоположны).

Это замечание позволяет в целом ряде задач, связанных с исследованием знака функций, заменить разность $f(u) - f(v)$ на более простое выражение $u - v$.

Для решения конкретных задач полезно помнить, что знаки чисел $a^2 - b^2$ и $a - b$ при положительных a и b совпадают, а при отрицательных – противоположны (подумайте, что можно сказать, если знаки a и b противоположны, а также – если рассматривать не квадраты, а любые положительные степени!). Одинаковы будут также знаки чисел $2^u - 2^v$ и $u - v$, $\log_2 u - \log_2 v$ и $u - v$, $\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg} v$ и $u - v$, а вот знаки чисел $\log_{0,5} u - \log_{0,5} v$ и $u - v$ противоположны.

Упражнение 12. Докажите, что совпадают знаки следующих чисел:

а) $|u| - |v|$ и $u^2 - v^2$; б) $\sqrt{u} - \sqrt{v}$ и $u - v$;

в) $a^u - a^v$ и $(u-v)(a-1)$; г) $\log_a u - \log_a v$ и $(u-v)(a-1)$;

д) $a^x - b$ и $(x - \log_a b)(a-1)$; е) $\log_a x - b$ и $\left(x - a^b\right)(a-1)$.

Рассмотрим теперь несколько примеров.

Задача 15. *Решите неравенство*

$$\frac{\sqrt{2-x} + 4x - 3}{x} \geq 2.$$

Решение. Область определения данного неравенства описывается системой

$$\begin{cases} x \leq 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Поскольку мы хотели бы применить метод интервалов, перенесем число 2 в левую часть неравенства, приведем ее к общему знаменателю:

$$\frac{\sqrt{2-x} + 2x - 3}{x} \geq 0. \qquad (10)$$

Неравенство (10), очевидно, справедливо при $x \geq \frac{3}{2}$. При $x < \frac{3}{2}$ запишем его так:

$$\frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{(3-x)^2}}{x} \geq 0. \qquad (10^*)$$

В неравенстве (10*) заменим разность корней разностью подкоренных выражений:

$$\frac{2 - x - (3-x)^2}{x} \geq 0,$$

т.е.

$$\frac{4x^2 - 11x + 7}{x} \leq 0.$$

Решив последнее неравенство методом интервалов, получаем ответ.

Ответ: $x < 2$; $1 \leq x < 2$.

Замечание. Как это нередко бывает, для решения задачи методом интервалов мы могли использовать разные функции. Например, мы могли рассуждать так: разность положительных чисел $\sqrt{2-x}$ и $\sqrt{(3-2x)^2}$ имеет тот же знак, что и разность их квадратов, а дальше все аналогично.

Применение монотонности упрощает и решение следующей задачи.

Задача 16. *Решите неравенство*

$$\log_{|x|}(x+2) < 2.$$