Замечание. Обратите внимание на то, что мы рассматривали отдельно два промежутка монотонности правой части. Дело в том, что все наши рассуждения верны лишь на общем промежутке монотонности двух функций. Если бы мы забыли, что правая часть монотонна не на всей числовой прямой, а лишь на полуосях оси абсцисс, произошла бы ошибка; например, «при $x = 1$ левая и правая части равны, левая часть возрастает, правая – убывает, поэтому при всех $x < 1$, $x \neq 0$ неравенство верно».

Упражнение 7. Решите уравнения и неравенства:

а) $2\sqrt[3]{x^2 + x - 1} = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}$;

б) $4^{\frac{1}{x}} - 1 = 3^{2x-1}$; в) $\log_3\left(1+\sqrt{x}\right) = 5 - x$;

г) $\log_2 x - \log_3 x = \sqrt{1-x}$; д) $\arcsin x < \arccos x$.

Преобразование к монотонным функциям

Во всех рассмотренных ранее задачах мы имели дело с монотонными левыми и правыми частями уравнений и неравенств, причем это была «нужная» монотонность – либо «встречная», либо с одной стороны монотонная функция, а с другой – константа. Чаще встречается ситуация, когда надо предварительно привести данное соотношение к такому виду, чтобы получились удобные для приведенных нами рассуждений функции. Вот классический пример такой задачи.

Задача 10. *Решите уравнение*

$$3^x + 4^x = 5^x . \qquad (6)$$

Комментарий. Конечно, корень $x = 2$ «виден» сразу (вы, наверное, помните «египетский» прямоугольный треугольник), но доказать его единственность аналогично предыдущим случаям не удается: ведь в уравнении (6) и левая, и правая части возрастают, и применять к этому уравнению утверждение (А**) мы не можем. Но с этой ситуацией в нашем случае легко справиться.

Решение. Разделив обе части уравнения (6) на не равную нулю (и даже положительную) при всех значениях x функцию 5^x, приходим к уравнению

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 , \qquad (6^*)$$

у которого левая часть убывает, а в правой – константа. По теореме (А) уравнение (6*) имеет не более одного корня, но $x = 2$ – корень.

Ответ: $x = 2$.

К рассмотренной задаче примыкает и следующая, чуть более сложная задача.

Задача 11. *Пусть положительные числа a, b и c при некотором положительном k удовлетворяют соотношению*

$$a^k + b^k = c^k . \qquad (7)$$

а) При каких значениях k существует треугольник со сторонами a, b и c?

б) Выясните, как зависит от k вид треугольника со сторонами a, b и c, когда он существует.

Комментарий. Конечно, мы должны преобразовать уравнение в духе решения задачи 10 и воспользоваться монотонностью левой части полученного уравнения. Кроме того, мы используем тот факт, что если c – наибольшее из трех данных чисел, то для существования искомого треугольника необходимо и достаточно выполнение неравенства $c < a + b$. Для решения пункта б) вспомним, что треугольник со сторонами a, b, c, где сторона c – наибольшая, *остроугольный*, если $a^2 + b^2 > c^2$, *прямоугольный*, если $a^2 + b^2 = c^2$, *тупоугольный* – если $a^2 + b^2 < c^2$ (это вытекает, например, из теоремы косинусов).

Решение. Ясно, что c – наибольшее из трех данных чисел, ведь $c^k = a^k + b^k > a^k$, откуда $\left(\frac{c}{a}\right)^k > 1$, поэтому $\frac{c}{a} > 1$, т.е. $c > a$; аналогично, $c > b$. Далее, разделив обе части данного уравнения на положительное число c^k, получим

$$\left(\frac{a}{c}\right)^k + \left(\frac{b}{c}\right)^k = 1 . \qquad (7^*)$$

а) В левой части уравнения (7*) стоит сумма монотонно убывающих функций, поэтому при $k \le 1$ одновременно выполняются неравенства $\left(\frac{a}{c}\right)^k \ge \frac{a}{c}$ и $\left(\frac{b}{c}\right)^k \ge \frac{b}{c}$. Складывая полученные неравенства и используя уравнение (7*), получаем, что при этих значениях k

$$1 = \left(\frac{a}{c}\right)^k + \left(\frac{b}{c}\right)^k \ge \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \text{, т.е. } a + b \le c .$$

Итак, при $0 < k \le 1$ треугольник со сторонами a, b и c не существует.

Осталось рассмотреть $k > 1$. В этом случае из монотонного убывания слагаемых левой части уравнения (7*) вытекает, что одновременно выполняются неравенства $\left(\frac{a}{c}\right)^k < \frac{a}{c}$ и $\left(\frac{b}{c}\right)^k < \frac{b}{c}$, откуда аналогично получим, что $a + b > c$, т.е. треугольник существует.

б) Снова воспользуемся монотонным убыванием слагаемых, стоящих в левой части уравнения (7*), только теперь нам надо сравнивать k не с единицей, как в пункте а), а с числом 2 (см. комментарий); при этом, конечно, не будем забывать, что теперь у нас $k > 1$ (ведь треугольник с данными сторонами существует).

Если $1 < k < 2$, одновременно выполняются неравенства $\left(\frac{a}{c}\right)^2 < \left(\frac{a}{c}\right)^k$ и $\left(\frac{b}{c}\right)^2 < \left(\frac{b}{c}\right)^k$. Сложив почленно эти неравенства, получаем, что при этих значениях k выполнено неравенство $a^2 + b^2 < c^2$, т.е. треугольник тупоугольный. Аналогично рассматриваются два остальных случая.

Ответ: а) при $k > 1$; б) при $1 < k < 2$ треугольник тупоугольный, при $k = 2$ – прямоугольный, при $k > 2$ – остроугольный.

Приведем две задачи, где не только обнаружить, но и доказать монотонность довольно сложно. При этом по традиции, сложившейся на вступительных экзаменах в МГУ, где давались эти задачи (факультет психологии, 1982 г., и химический факультет, 1998 г.), мы постараемся обойтись без использования производной (ее применение, конечно, не запрещено, но задачи составляются так, чтобы можно было обосновать монотонность непосредственно).

Задача 12. *Решите уравнение*

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2 + 2x - 2\right) = \log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2 + 2x - 3\right). \qquad (8)$$

Комментарий. Поскольку под знаком логарифма стоят квадратные трехчлены с положительным старшим коэффициентом, ни о какой монотонности в таком виде не может быть и речи. С другой стороны, эти трехчлены, а также основания логарифмов очень «похожи», как-то связаны друг с другом, так что попробуем удачно преобразовать основания и сделать хорошую замену переменной. Обратите внимание на то, как мы далее получим монотонную функцию, и постарайтесь освоить этот прием.