

Задача 5. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{3x - 2} < 4. \quad (4)$$

Решение. Найдем область допустимых значений переменной данного неравенства:

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0, \\ 3x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

При этих значениях x левая часть (4) – возрастающая функция (вершина параболы – графика квадратного трехчлена $y = x^2 + x - 2$ – имеет абсциссу $x = -0,5$, поэтому при $x \geq 1$ первое подкоренное выражение, а вместе с ним и все первое слагаемое левой части (4), возрастает, второе слагаемое – также возрастающая функция), а правая часть – константа. Поскольку при $x = 2$ левая часть (4) равна правой, данное неравенство справедливо при всех допустимых значениях x , меньших 2 (при больших значениях x левая часть (4) больше, чем при $x = 2$).

Ответ: $1 \leq x < 2$.

Замечание. Полезно отметить, что мы, по существу, использовали следующее утверждение: если $y = f(x)$ – функция, возрастающая на промежутке $[a; b]$, то для любого числа c , такого что $a < c < b$, неравенство $f(x) < f(c)$ равносильно неравенству $a \leq x < c$.

Решим теперь несколько более сложную задачу.

Задача 6. Решите уравнение

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} + x = \frac{24}{5}.$$

Решение. Ясно, что отрицательных корней данное уравнение иметь не может (при отрицательных значениях x его левая часть отрицательна, а правая – положительна). Не очень сложно угадать один его корень: $x = 4$. Покажем, что других корней нет. Для этого убедимся в том, что функция

$y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$ возрастает при положительных значениях x . Действительно, при таких x справедливо равенство

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}}$$

Дальше рассуждаем стандартным образом: подкоренное выражение в знаменателе последней дроби при $x > 0$ убывает, поэтому и сам знаменатель убывает, но тогда дробь возрастает – ее числитель не меняется, а знаменатель убывает.

Ответ: $x = 4$.

Замечание. Очень важно научиться легко ориентироваться в подобных ситуациях: что будет с дробью, если ее числитель растет, а знаменатель убывает и при этом (очень важно!) они положительны (или отрицательны); числитель убывает, знаменатель растет и т.п.

Упражнения

5. Исследуйте на монотонность функции:

а) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$; б) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$; в) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

6. Решите уравнения и неравенства:

а) $\sqrt{x^2 - 2x + 3} + \sqrt{x - 1} + \sqrt[3]{x - 3} = \sqrt{3}$;

б) $\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $4^x - 3^x = 37$;

г) $x^{10} + \sqrt{x - 1} \geq 33$; д) $x^5 + x^3 + 2\sqrt{x} \geq 4$;

е) $2^{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} < 1$.

«Встречная» монотонность

Приведем теперь еще одну очевидную, но часто употребляющуюся переформулировку теоремы (А) о корне (ее иногда называют теоремой о «встречной» монотонности).

(А**) Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке I , а функция $y = g(x)$ убывает на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на промежутке I не более одного корня.

Задача 7. Решите уравнение

$$x^2 - x + 2 = \sqrt{x + 7} - \sqrt{x - 1}. \quad (5)$$

Решение. Правая часть уравнения (5) – функция, убывающая на своей области определения, т.е. при всех значениях $x \geq 1$:

$$\sqrt{x + 7} - \sqrt{x - 1} = \frac{(x + 7) - (x - 1)}{\sqrt{x + 7} + \sqrt{x - 1}} = \frac{8}{\sqrt{x + 7} + \sqrt{x - 1}};$$

очевидно, что дробь, у которой числитель постоянен, а знаменатель возрастает, убывает. С другой стороны, при $x \geq 1$ квадратный трехчлен, стоящий в левой части уравнения (5), возрастает, так как вершина его графика, параболы, имеет абсциссу, равную 0,5, а ее ветви направлены вверх. Таким образом, у нас имеется ситуация, описанная в утверждении (А**), и уравнение (5) имеет не более одного корня. Но при $x = 2$ левая часть (5) равна правой.

Ответ: $x = 2$.

Задача 8. Решите неравенство

$$3^x - 7 > 4^{\frac{1}{x}}.$$

Решение. Очевидно, при $x < 0$ неравенство решений не имеет: его левая часть отрицательна, а правая – положительна; $x = 0$ – тоже не решение. Пусть теперь $x > 0$. Тогда левая часть данного неравенства возрастает, а правая – убывает (с ростом x показатель степени убывает) – опять «встречная» монотонность. При $x = 2$ левая часть равна правой (и равна 2). Поэтому при $x > 2$ левая часть больше двух, а правая часть меньше двух, и данное неравенство будет выполнено. При $0 < x < 2$ левая часть меньше двух, а правая – больше, так что эти значения x не являются решениями.

Ответ: $x > 2$.

Задача 9. Решите неравенство

$$4 \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{x}.$$

Решение. Функция $y = 4 \operatorname{arctg} x$ возрастает на всей числовой оси. Функция $y = \frac{\pi}{x}$ убывает и при $x < 0$, и при $x > 0$. Поэтому рассмотрим отдельно отрицательные и положительные значения x . На каждом из этих множеств имеется «встречная» монотонность (см. рисунок). Корни соответствующего уравнения угадываются легко: $x = \pm 1$ (можно воспользоваться и нечетностью левой и правой частей).

Ответ: $x < -1, 0 < x < 1$.

