$$= \frac{(37x_1+12)-(37x_2+12)}{\sqrt{37x_1+12}+\sqrt{37x_2+12}} =$$

$$= \frac{37(x_1-x_2)}{\sqrt{37x_1+12}+\sqrt{37x_2+12}} > 0, \text{ т.е. } f(x_1)-f(x_2)>0. \quad (2^*)$$

(Заметим, что, как это нередко бывает при преобразовании выражений, содержащих квадратные радикалы, нам помогло умножение и деление разности корней на сопряженное выражение – сумму этих же квадратных корней.)

Аналогично,

$$g(x_1)-g(x_2) = \frac{-6(x_1-x_2)}{\sqrt{31-6x_1}+\sqrt{31-6x_2}} < 0,$$

$$\text{т.е. } g(x_1)-g(x_2)<0. \quad (2^{**})$$

Наконец, обозначив левую часть уравнения (2), т.е. $f(x)-g(x)$, через $h(x)$ и почленно вычтя из неравенства (2*) неравенство (2**) [1], получим $\left(f(x_1)-g(x_1)\right)-\left(f(x_2)-g(x_2)\right)>0$. Но это значит, что $h(x_1)-h(x_2)>0$, т.е. функция $h(x)$ монотонно возрастает, что и утверждалось в нашем решении задачи.

Решая следующие упражнения, потренируйтесь в угадывании корней.

**Упражнения**

**1.** Решите уравнения:

а) $2x^3+x-3=0$; б) $x^5+3x^3+4=0$;

в) $2^x+x=6$; г) $\lg x+\sqrt{x-1}=4$.

**2.** Решите уравнения:

а) $\sqrt{5x+1}+\sqrt{17x+13}=12$;

б) $\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[5]{14x+4}=4$; в) $\sqrt{x}-\sqrt{5-x}=1$.

**3.** Исследуйте на монотонность функции:

а) $y=x+\dfrac{1}{x}$ при $x>1$; б) $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$;

в) $y=2^x-3^x$ при $x>0$; г) $y=5^x-3^x$ при $x>0$;

д) $y=\log_3 x-\log_2 x$ при $x<0$, $0<x<1$;

е) $y=a^x-b^x$ при $x<0$ и $0<a<b<1$;

ж) $y=\log_a x-\log_b x$ при $a>b>1$.

## Сумма и разность монотонных функций

Сейчас мы сформулируем два важных свойства монотонных функций (мы ими, по существу, уже пользовались).

(В) *а) Сумма возрастающих (убывающих) функций – функция, возрастающая (соответственно, убывающая) на их общей области определения.*

*б) Разность возрастающей и убывающей (убывающей и возрастающей) функций – функция, возрастающая (соответственно, убывающая) на их общей области определения.*

**Упражнение 4.** Докажите оба утверждения (В).

*Указание.* Можно использовать известные вам свойства числовых неравенств.

Понятно, что первое из свойств (В) верно для любого конечного числа складываемых функций.

[1] *Здесь мы используем известное свойство числовых неравенств: неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, сохраняя знак уменьшаемого неравенства (того, **из которого** вычитают). Вообще, мы советуем повторить свойства неравенств, поскольку ими часто приходится пользоваться при исследовании функций (в частности, на монотонность).*

**Задача 3.** *Решите уравнение*

$$\sqrt[3]{4x-1}+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[9]{x-6}=6.$$

*Комментарий.* Конечно, немыслимо решить это уравнение почленным возведением в степень (третью, девятую, причем неоднократно!). Это, как ни странно, сильно облегчает задачу – предостерегает от неправильного пути и заставляет искать другие способы.

**Решение.** Левая часть данного уравнения – возрастающая функция (см. утверждение (В). Поэтому, согласно (А*), у него не более одного корня. Решение легко предъявить – это $x=7$: при подстановке его в уравнение получаем $3+2+1=6$, это – верное равенство.

*Ответ*: $x=7$.

Теперь рассмотрим задачу, для решения которой в указанном духе удобно привлечь идею симметрии (эта задача предлагалась на заочном туре одной из Соросовских олимпиад).

**Задача 4.** *Решите уравнение*

$$\sqrt{x(x+7)}+\sqrt{(x+7)(x+17)}+$$
$$+\sqrt{(x+17)(x+24)}=12+17\sqrt{2}. \quad (3)$$

**Решение.** Если записать первое подкоренное выражение в виде $(x+0)(x+7)$ и нанести на числовую ось четыре числа, которые суммируются с неизвестной величиной во всех скобках левой части, мы увидим, что эта система из четырех точек имеет центр симметрии – точку 12 (относительно нее симметрична пара чисел 0 и 24, а также пара 7 и 17). Поэтому замена переменной $t=x+12$ (откуда $x=t-12$) симметризует левую часть уравнения (3), которое примет вид

$$\sqrt{(t-12)(t-5)}+\sqrt{(t-5)(t+5)}+$$
$$+\sqrt{(t+5)(t+12)}=12+17\sqrt{2}. \quad (3^*)$$

Обозначим левую часть уравнения (3*) через $f(t)$. Заметим, что функция $f(t)$ определена в симметричной относительно нуля области

$$\left[\begin{array}{l} t\le -12, \\ t\ge 12 \end{array}\right.$$

и обладает свойством $f(-t)=f(t)$, т.е. является четной. Поэтому достаточно решить уравнение (3*) для $t\ge 12$. Но при этих значениях $t$ каждый из трех трехчленов, стоящих под знаком радикала в левой части (3*), возрастает, значит, возрастают и квадратные корни из этих трехчленов. Поэтому, применив утверждение (В), получим, что при $t\ge 12$ левая часть (3*) – возрастающая функция, а значит, уравнение имеет не более одного корня. Находим подбором, что $t=13$ – корень (подставив это значение $t$ в левую часть уравнения (3*), получим

$$\sqrt{8}+12+5\sqrt{18}=2\sqrt{2}+12+15\sqrt{2}=12+17\sqrt{2},$$

что равно правой части).

Итак, $t=13$, откуда $x=1$. Поскольку $t=-13$ тоже решение уравнения (3*), получаем и второй корень исходного уравнения: $x=-25$.

*Ответ*: $x_1=1$; $x_2=-25$.

*Замечание.* Конечно, можно не делать замену переменной, а рассуждать о симметрии левой части относительно $x=12$ и использовать ее монотонность при $x\ge 12$, но это выглядит менее изящно и естественно.

Понятно, что соображения монотонности могут применяться не только при решении уравнений, но и в задачах с неравенствами.