

$$= \frac{(37x_1 + 12) - (37x_2 + 12)}{\sqrt{37x_1 + 12} + \sqrt{37x_2 + 12}} = \frac{37(x_1 - x_2)}{\sqrt{37x_1 + 12} + \sqrt{37x_2 + 12}} > 0, \text{ т.е. } f(x_1) - f(x_2) > 0. \quad (2^*)$$

(Заметим, что, как это нередко бывает при преобразовании выражений, содержащих квадратные радикалы, нам помогло умножение и деление разности корней на сопряженное выражение – сумму этих же квадратных корней.)

Аналогично,

$$g(x_1) - g(x_2) = \frac{-6(x_1 - x_2)}{\sqrt{31 - 6x_1} + \sqrt{31 - 6x_2}} < 0, \text{ т.е. } g(x_1) - g(x_2) < 0. \quad (2^{**})$$

Наконец, обозначив левую часть уравнения (2), т.е. $f(x) - g(x)$, через $h(x)$ и почленно вычтя из неравенства (2*) неравенство (2**),¹ получим $(f(x_1) - g(x_1)) - (f(x_2) - g(x_2)) > 0$. Но это значит, что $h(x_1) - h(x_2) > 0$, т.е. функция $h(x)$ монотонно возрастает, что и утверждалось в нашем решении задачи.

Решая следующие упражнения, потренируйтесь в угадывании корней.

Упражнения

1. Решите уравнения:

- а) $2x^3 + x - 3 = 0$; б) $x^5 + 3x^3 + 4 = 0$;
- в) $2^x + x = 6$; г) $\lg x + \sqrt{x-1} = 4$.

2. Решите уравнения:

- а) $\sqrt{5x+1} + \sqrt{17x+13} = 12$;
- б) $\sqrt[3]{3x+2} + \sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{14x+4} = 4$; в) $\sqrt{x} - \sqrt{5-x} = 1$.

3. Исследуйте на монотонность функции:

- а) $y = x + \frac{1}{x}$ при $x > 1$; б) $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$;
- в) $y = 2^x - 3^x$ при $x > 0$; г) $y = 5^x - 3^x$ при $x > 0$;
- д) $y = \log_3 x - \log_2 x$ при $x < 0, 0 < x < 1$;
- е) $y = a^x - b^x$ при $x < 0$ и $0 < a < b < 1$;
- ж) $y = \log_a x - \log_b x$ при $a > b > 1$.

Сумма и разность монотонных функций

Сейчас мы сформулируем два важных свойства монотонных функций (мы ими, по существу, уже пользовались).

(В) а) Сумма возрастающих (убывающих) функций – функция, возрастающая (соответственно, убывающая) на их общей области определения.

б) Разность возрастающей и убывающей (убывающей и возрастающей) функций – функция, возрастающая (соответственно, убывающая) на их общей области определения.

Упражнение 4. Докажите оба утверждения (В).

Указание. Можно использовать известные вам свойства числовых неравенств.

Понятно, что первое из свойств (В) верно для любого конечного числа складываемых функций.

¹ Здесь мы используем известное свойство числовых неравенств: неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, сохраняя знак уменьшаемого неравенства (того, из которого вычитают). Вообще, мы советуем повторить свойства неравенств, поскольку ими часто приходится пользоваться при исследовании функций (в частности, на монотонность).

Задача 3. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{4x-1} + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-6} = 6.$$

Комментарий. Конечно, немисливо решить это уравнение почленным возведением в степень (третью, девятую, причем неоднократно!). Это, как ни странно, сильно облегчает задачу – предостерегает от неправильного пути и заставляет искать другие способы.

Решение. Левая часть данного уравнения – возрастающая функция (см. утверждение (В)). Поэтому, согласно (А*), у него не более одного корня. Решение легко предъявить – это $x = 7$: при подстановке его в уравнение получаем $3 + 2 + 1 = 6$, это – верное равенство.

Ответ: $x = 7$.

Теперь рассмотрим задачу, для решения которой в указанном духе удобно привлечь идею симметрии (эта задача предлагалась на заочном туре одной из Соросовских олимпиад).

Задача 4. Решите уравнение

$$\sqrt{x(x+7)} + \sqrt{(x+7)(x+17)} + \sqrt{(x+17)(x+24)} = 12 + 17\sqrt{2}. \quad (3)$$

Решение. Если записать первое подкоренное выражение в виде $(x+0)(x+7)$ и нанести на числовую ось четыре числа, которые суммируются с неизвестной величиной во всех скобках левой части, мы увидим, что эта система из четырех точек имеет центр симметрии – точку 12 (относительно нее симметрична пара чисел 0 и 24, а также пара 7 и 17). Поэтому замена переменной $t = x + 12$ (откуда $x = t - 12$) симметризует левую часть уравнения (3), которое примет вид

$$\sqrt{(t-12)(t-5)} + \sqrt{(t-5)(t+5)} + \sqrt{(t+5)(t+12)} = 12 + 17\sqrt{2}. \quad (3^*)$$

Обозначим левую часть уравнения (3*) через $f(t)$. Заметим, что функция $f(t)$ определена в симметричной относительно нуля области

$$\begin{cases} t \leq -12, \\ t \geq 12 \end{cases}$$

и обладает свойством $f(-t) = f(t)$, т.е. является четной. Поэтому достаточно решить уравнение (3*) для $t \geq 12$. Но при этих значениях t каждый из трех трехчленов, стоящих под знаком радикала в левой части (3*), возрастает, значит, возрастают и квадратные корни из этих трехчленов. Поэтому, применив утверждение (В), получим, что при $t \geq 12$ левая часть (3*) – возрастающая функция, а значит, уравнение имеет не более одного корня. Находим подбором, что $t = 13$ – корень (подставив это значение t в левую часть уравнения (3*), получим

$$\sqrt{8} + 12 + 5\sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 12 + 15\sqrt{2} = 12 + 17\sqrt{2},$$

что равно правой части).

Итак, $t = 13$, откуда $x = 1$. Поскольку $t = -13$ тоже решение уравнения (3*), получаем и второй корень исходного уравнения: $x = -25$.

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = -25$.

Замечание. Конечно, можно не делать замену переменной, а рассуждать о симметрии левой части относительно $x = 12$ и использовать ее монотонность при $x \geq 12$, но это выглядит менее изящно и естественно.

Понятно, что соображения монотонности могут применяться не только при решении уравнений, но и в задачах с неравенствами.