Монотонные функции в конкурсных задачах

А.ЕГОРОВ, Ж.РАББОТ

Метод решения задач, который мы рассмотрим в этой статье, применим как к обычным школьным задачам, так и к более сложным, часто называемым нестандартными.

При изучении школьного курса алгебры и особенно начал математического анализа вам часто приходилось выяснять, возрастает или убывает та или иная функция. Мы постараемся в этой статье показать, что использование монотонности функций, входящих в уравнение или неравенство (иногда вообще не фигурирующих в условии, а появляющихся по ходу решения), нередко сильно упрощает техническую часть решения, а порой без него просто немыслимо решить задачу.

Теорема о корне

Сначала напомним основное определение.

Функция $y = f(x)$ называется *монотонно возрастающей* (*монотонно убывающей*) на некотором промежутке, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) > f(x_2)$).

Наглядный смысл возрастания или убывания функции прозрачен – график возрастающей функции при движении по нему слева направо идет все выше и выше (а убывающей – все ниже и ниже). Мы, естественно, предполагаем, что оси координат расположены стандартным образом: ось абсцисс Ox горизонтальна и направлена слева направо, а ось ординат Oy вертикальна и направлена снизу вверх.

Если функция возрастает или убывает на некотором промежутке, говорят, что она *монотонна* на этом промежутке.

Первый факт, часто использующийся при решении задач, в том или ином виде доказан в вашем школьном курсе (например, в учебнике для 10—11 классов под редакцией А.Н.Колмогорова он приводится под названием «Теорема о корне» при введении обратных тригонометрических функций в начале 10 класса). Напомним его.

(А) *Пусть функция f возрастает (убывает) на промежутке I, число a – любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x) = a$ имеет единственный корень в промежутке I.*

Нам иногда будет удобнее несколько иная формулировка этого факта.

(А*) *Пусть $y = f(x)$ – монотонная на некотором промежутке функция. Тогда при любом значении a уравнение $f(x) = a$ имеет на этом промежутке не более одного корня.*

Наглядный смысл теоремы о корне (А) и ее переформулировки (А*) также прозрачен – горизонтальная прямая $y = a$ может пересечь график монотонной функции $y = f(x)$ не более чем в одной точке (т.е. либо вообще его не пересекает, либо пересекает в единственной точке).

Начнем с совсем простой задачи.

Задача 1. *Решите уравнение*

$$x^3 + x = 10\,. \qquad (1)$$

Решение. Сразу заметим, что левая часть данного уравнения – функция, возрастающая на всей числовой прямой (это очень легко доказать). Следовательно, уравнение (1) имеет не более одного корня – теорема (А*). Но корень легко угадать: при $x = 2$ левая часть данного уравнения равна правой.

Ответ: $x = 2$.

Решим теперь чуть более трудную задачу.

Задача 2. *Решите уравнение*

$$\sqrt{37x+12} - \sqrt{31-6x} = 2\,. \qquad (2)$$

Комментарий. Уравнение (2) можно решить стандартным школьным способом, почленно возведя (дважды) промежуточные иррациональные уравнения в квадрат, найдя затем корни полученного квадратного уравнения с многозначными коэффициентами и произведя после этого отсев возможных посторонних решений. Однако задача допускает решение «в одну строчку».

Решение. Левая часть уравнения (2) – возрастающая в своей области определения функция (первый радикал при увеличении x, очевидно, увеличивается, а второй – уменьшается, но он вычитается из первого, поэтому их разность возрастает). По теореме (А*) уравнение (2) имеет не более одного решения. Его легко предъявить: это $x = 1$. Действительно, при подстановке этого значения неизвестного в (2) получается верное равенство 7 – 5 = 2.

Ответ: $x = 1$.

Замечания. 1. Откуда взялся корень $x = 1$? Мы его просто угадали! Некоторые школьники считают приведенное решение «нестрогим» – как это можно что-то угадывать? Но в нашем решении все в порядке – доказано, что решений не больше одного и предъявлено решение (неважно, откуда мы его взяли). Кстати, угадать решение было довольно просто – мы начали перебирать целые неотрицательные значения x и искать, при каких из них «извлекается» второй корень (там просто меньше коэффициенты, чем под знаком первого корня). При $x = 0$ корень «не извлекся», а при $x = 1$ – извлекся (под корнем получился полный квадрат – число 25), тогда мы подставили $x = 1$ в уравнение (2) и получили верное равенство. Начинали мы с $x = 0$, так как при отрицательных целых x первый радикал не существует – подкоренное выражение отрицательно. Конечно, угадать корень можно далеко не всегда, но мы и не претендуем на универсальность такого подхода к решению.

2. Насколько строго наше доказательство монотонности левой части уравнения (2)? На наш взгляд, приведенного нами рассуждения вполне достаточно, но при необходимости его легко формализовать. Пусть x_1 и x_2 – произвольные числа из области определения левой части уравнения (2), причем $x_1 > x_2$. Введем обозначения:

$$f(x) = \sqrt{37x+12}\,,\; g(x) = \sqrt{31-6x}\,.$$

Тогда

$$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{37x_1+12} - \sqrt{37x_2+12} =$$