Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон.

11. Робинзон поручил Пятнице запастись бананами, кокосами, ананасами и дурианами. Пятница решил каждый принесенный банан отмечать палочкой, кокос – палочкой и кружочком, ананас – двумя кружочками. Может ли Пятница отмечать дуриан какой-нибудь последовательностью из палочек и кружочков, чтобы по его записи (Пятница пишет подряд без пробелов) Робинзон всегда мог однозначно установить, сколько каких плодов было запасено?

А.Малеев

12. Сколько существует трехзначных чисел, представимых в виде суммы

$$\overline{abc}+\overline{ab}+a\,?$$

А.Спивак

13. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ имеются по крайней мере две параллельные стороны тогда и только тогда, когда произведение площадей треугольников ABD и BCD равно произведению площадей треугольников ABC и ACD.

А.Джумадильдаев

14. Докажите, что

а) среди чисел вида 5^m-5^n, где m и n – различные натуральные числа, $m>n$, имеется сколь угодно много квадратов;

б) среди чисел вида 7^m+7^n нет ни одного квадрата, зато имеется сколь угодно много кубов.

А.Зайчик

15. Имеется 10 столбиков, содержащих 61, 62, 63, ..., 70 монет. Двое игроков ходят по очереди, снимая монеты со столбиков. За один ход можно забирать монеты из одного или нескольких столбиков (даже со всех сразу), но количество снятых с каждого столбика монет не может превышать $\sqrt{n}$, где n – количество монет в этом столбике. Победителем считается тот, кто возьмет последнюю монету.

Кто из игроков может обеспечить себе победу при любой игре соперника?

И.Акулич

Великомученик Петя

И.АКУЛИЧ

Рассмотрим положительные числа a и b. Как известно, их среднее арифметическое – это $\frac{a+b}{2}$, а среднее геометрическое – число $\sqrt{ab}$. Чуть меньшей известностью пользуется среднее гармоническое: $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$. Очевидно, что

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab,$$

т.е. произведение среднего арифметического и среднего гармонического равно произведению самих чисел a и b.

В 1999 году А.Канель понял, что из этого можно «слепить» неплохую задачу для олимпиады, примерно такую:

Пусть $a_0=1$, $b_0=2$ и для любого натурального n числа a_n и b_n – соответственно, среднее арифметическое и среднее гармоническое чисел a_{n-1} и b_{n-1}. Найдите произведение $a_{1999}b_{1999}$.

Решение состоит в том, что произведение a_nb_n одно и то же для всех n, поэтому $a_{1999}b_{1999}=a_0b_0=2$.

Но автор, видимо, решил, что условие выглядит скучновато, и «оживил» его:

На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифмети-