

замечаний, которые, быть может, послужили зародышем идеи, развитой впоследствии Валлисом. Возможно, Валлису было важно добиться расположения Броункера и его покровительства, поэтому он и назвал этот метод методом Броункера (ибо Броункер в 1662–1677 годах был президентом основанного в 1660 году Лондонского Королевского общества). Впрочем, некоторые историки считают самого Броункера весьма способным математиком и утверждают, что по своим личным качествам Валлис скорее мог приписать себе чужие заслуги, чем отказаться от своих.

Строго говоря, англичане не решили задачу Ферма, которая заключалась в том, что при данном (не являющемся квадратом) натуральном  $d$  существует бесконечно много натуральных  $x$  таких, что  $dx^2 + 1$  является квадратом. Они не доказали, что процедура всегда завершится, и, кажется, даже не понимали, что это нужно доказывать.<sup>3</sup>

Ферма написал письмо, в котором признал, что англичанам удалось решить его задачу, и не проявил ни малейшей неудовлетворенности их методом. Однако главным для Ферма в этом письме было убедить англичан, что перед ними была поставлена достойная задача, так что он мог сознательно закрыть глаза на недостатки.

Несколько лет спустя, подводя в письме к Каркави итоги некоторых своих открытий, Ферма указал, что англичане получили решение его задачи только в отдельных частных случаях и им не удалось дать общее доказательство. Очевидная интерпретация этого замечания заключается в том, что Ферма заметил отсутствие доказательства того, что процесс всегда приводит к решению; с другой стороны, в нем можно увидеть и менее глубокую критику того, что процесс был описан в недостаточно общих терминах. Ферма утверждает, что он мог бы дать доказательство, «надлежащим образом» применив метод бесконечного спуска. Эти слова, разумеется, нельзя считать достаточным свидетельством в пользу того, что он умел решать свою задачу.

### Индийский и английский методы

Легенды гласят, что за несколько веков до нашей эры в Индии было известно равенство  $2 \cdot 408^2 + 1 = 577^2$ . Равенство  $92 \cdot 120^2 + 1 = 1151^2$  вместе с изощренной техникой его вывода было получено Брахмагуптой (родился в 598 году). Общий способ решения уравнения Пелля<sup>4</sup> дал Бхаскара Акхария. Этот метод называют циклическим или индийским.

<sup>3</sup> Даже Эйлеру не удалось доказать, что английский метод всегда приводит к успеху. Удалось это Лагранжу через 110 лет после того, как Валлис отослал ответ на вызов Ферма.

<sup>4</sup> Термин «уравнение Пелля» возник в результате ошибки Леонарда Эйлера. Почему-то – возможно, по причине смутных воспоминаний, оставшихся от чтения «Алгебры» Валлиса, – у Эйлера создалось впечатление, будто Валлис приписывает метод решения этой задачи не Броункеру, а Пеллю – современнику Валлиса, который много раз упомянут в его работах, но не имел никакого отношения к уравнению  $x^2 - dy^2 = 1$ . Эйлер впервые сделал эту ошибку в 1730 году, когда ему было 23 года, но она попала и в окончательное издание «Введения в алгебру» (примерно 1770 г.). Эйлер был самым популярным математическим автором своего времени, и ошибка вошла в историю...

Познакомимся с ним на примере  $d = 67$ . Наша цель – найти такие натуральные  $x$  и  $y$ , чтобы разность  $y^2 - 67x^2$  равнялась 1. В качестве первого приближения рассмотрим равенство

$$8^2 - 67 \cdot 1^2 = -3.$$

Вспомнив формулу

$$(a^2 - 67b^2)(c^2 - 67d^2) = (ac + 67bd)^2 - 67(bc + ad)^2$$

и применив ее к равенствам  $8^2 - 67 \cdot 1^2 = -3$  и  $r^2 - 67 \cdot 1^2 = s$ , где  $r$  (а тем самым и  $s$ ) будет определено позже, получим

$$(8r + 67)^2 - 67(r + 8)^2 = -3s.$$

Пытаясь сделать правую часть (по модулю) как можно меньшей только за счет выбора наименьшего по модулю значения  $s$ , мы выбрали бы  $r = 8$ , при котором  $s = -3$ , и получили бы равенство

$$131^2 - 67 \cdot 16^2 = 9,$$

с которым непонятно что делать дальше.

*Идея циклического метода* – выбор такого  $r$ , чтобы  $r + 8$  делилось на 3 и  $s$  при этом было как можно меньше по модулю. (Когда это сделано, обе части уравнения разделятся нацело на  $3^2$ .)

*Идея английского метода* – выбор такого как можно большего  $r$ , что  $r^2 < d$  и  $r + 8$  делится на 3.

Как видите, методы очень похожи. Оба можно применять для поиска решений при данном  $d$ , не зная заранее, что это приведет к успеху. (Между прочим, априори нет никакой уверенности в том, что в общем случае в английском методе после каждого шага  $r$  будет существовать. Это – одна из теорем, которые надо доказывать, обосновывая английский метод.)

Проведем подробно вычисления для циклического метода. Чтобы  $r + 8$  делилось на 3, число  $r$  должно равняться одному из чисел бесконечной в обе стороны арифметической прогрессии  $\dots, -2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots$ . Выбор  $r = 7$  дает наименьшее по модулю значение  $s = -18$ . Этим  $r$  и  $s$  соответствует равенство

$$123^2 - 67 \cdot 15^2 = 54,$$

которое после сокращения на 9 превращается в

$$41^2 - 67 \cdot 5^2 = 6.$$

Теперь – следующий шаг циклического метода:

$$(41r + 67 \cdot 5)^2 - 67(5r + 41)^2 = 6s.$$

Число  $5r + 41$  делится на 6 при  $r = \dots, -7, -1, 5, 11, 17, 23, \dots$ . Выбор  $r = 5$  дает наименьшее по модулю  $s = -42$ , и мы получаем равенство

$$540^2 - 67 \cdot 66^2 = 6 \cdot (-42),$$

которое после сокращения на  $6^2$  превращается в

$$90^2 - 67 \cdot 11^2 = -7.$$

Дальше надо выполнить следующий шаг циклического метода, потом еще один, и так до тех пор, пока не получим равенство, в правой части которого будет 1.