последователи недостаточно занимались этой теорией (если только она не содержалась в тех книгах Диофанта, которых мы лишились вследствие разрушительного действия времени); следовательно, арифметикам предстоит развивать или восстанавливать ее.

Поэтому арифметикам, дабы осветить тот путь, по которому надо следовать, предлагаю я эту теорему, чтобы они доказали ее, или эту задачу, чтобы они решили ее. Если же преуспеют они в ее доказательстве или решении, то им придется признать, что вопросы такого рода ничем не уступают в отношении красоты, трудности или метода доказательства самым знаменитым вопросам геометрии.

Если дано произвольное число, которое не является квадратом, то найдется бесконечное множество таких квадратов, что если этот квадрат умножить на данное число и к произведению прибавить единицу, то результат будет квадратом.

Пример. Пусть 3, которое не является квадратом, будет данным числом. Если умножить его на квадрат, равный 1, и к произведению добавить 1, то в результате получится 4, что является квадратом. Если то же самое число 3 умножить на 16, то получится произведение, которое при увеличении на 1 превращается в 49, тоже квадрат. И кроме 1 и 16 можно найти бесконечное множество квадратов с тем же свойством.

Но я спрашиваю об общем правиле решения – когда дано произвольное число, не являющееся квадратом. Например, найдите такой квадрат, что если произведение этого квадрата и числа 109, 149 или 433 увеличить на 1, то получится квадрат.»

Таков был вызов Ферма, который он сделал в 1657 году другим математикам, в частности английским. Очевидно, что он желает не традиционного диофантова решения в рациональных числах, а решения задачи в *целых* числах.[2] Как это ни странно, но пояснения к задаче были опущены одним из посредников в том экземпляре письма, который был передан английским математикам; в результате они сочли задачу совершенно глупой. А именно, можно ввести обозначение

$$x = 1 + \frac{m}{n} y$$

и подставить в уравнение:

$$\left(1 + \frac{m}{n} y\right)^2 - dy^2 = 1, \qquad \frac{2m}{n} y + \frac{m^2}{n^2} y^2 - dy^2 = 0,$$

$$2mn = \left(dn^2 - m^2\right) y,$$

откуда

$$y = \frac{2mn}{dn^2 - m^2}, \quad x = \frac{dn^2 + m^2}{dn^2 - m^2}.$$

Полученные формулы, как легко убедиться, дают бесконечно много решений в рациональных числах.

Упражнение 54. а) Убедитесь, что эти формулы дают все решения. б) Найдите аналогичные формулы для уравнения $x^2 + y^2 = 1$.

[2] *По иронии судьбы, ныне слово «диофантово» употребляют, желая получить решения в целых числах, тогда как сам Диофант ни в одной из дошедших до нас работ не занимался решениями в целых числах, а только в рациональных.*

Когда же дополнительное требование, что x и y должны быть целыми числами, дошло до английских математиков, то они пожаловались, что условие задачи изменили. Конечно, их жалобу можно понять в свете сильной диофантовой традиции, но, как указал Ферма, было наивно надеяться, что он предложил тривиальную задачу. Как видно из приведенной здесь таблицы, задача Ферма весьма сложная: для $d = 61$ наименьшее решение – это пара $y = 226153\,980$ и $x = 1766319049$. (Впрочем, впервые посчитал это не Ферма, а родившийся в 1114 году индиец Бхаскара Акхария.) А для $d = 109$ вообще $y = 15140424455100$.

Таблица

2) 2	3) 1	5) 4	6) 2
7) 3	8) 1	10) 6	11) 3
12) 2	13) 180	14) 4	15) 1
17) 8	18) 4	19) 39	20) 2
21) 12	22) 42	23) 5	24) 1
26) 10	27) 5	28) 24	29) 1820
30) 2	31) 273	32) 3	33) 4
34) 6	35) 1	37) 12	38) 6
39) 4	40) 3	41) 120	42) 2
43) 531	44) 30	45) 24	46) 3588
47) 7	48) 1	50) 14	51) 7
52) 90	53) 9100	54) 66	55) 12
56) 2	57) 20	58) 2574	59) 69
60) 4	61) 226153980	62) 8	63) 1
65) 16	66) 8	67) 5967	68) 4
69) 936	70) 30	71) 413	72) 2
73) 267000	74) 430	75) 3	76) 6630
77) 40	78) 6	79) 9	80) 1
82) 18	83) 9	84) 6	85) 30996
86) 1122	87) 3	88) 21	89) 53000
90) 2	91) 165	92) 120	93) 1260
94) 221064	95) 4	96) 5	97) 6377352
98) 10	99) 1	101) 20	102) 101
03) 22419	104) 5	105) 4	106) 3115890
107) 93	108) 130	109) 15140424455100	110) 2
111) 28	112) 12	113) 113296	114) 96
115) 105	116) 910	117) 60	118) 28254
119) 11	120) 1	122) 22	123) 11
124) 414960	125) 83204	126) 40	127) 419775
128) 51	129) 1484	130) 570	131) 927
132) 2	133) 224460	134) 12606	135) 21
136) 3	137) 519712	138) 4	139) 6578829
140) 61	41) 8	142) 12	143) 1
145) 24	146) 12	147) 8	148) 6
149) 2113761020	150) 4		

Что сделали англичане?

Англичанам удалось не только найти частные решения при $d = 109$, 149 или 433, но и разработать общую процедуру получения решений для любого значения d. Кто это сделал – неизвестно. Хотя Джон Валлис (1616–1703) первым дал описание процедуры и получил решения в трех частных случаях, он приписывает авторство виконту Уильяму Броункеру (1620–1684). В опубликованной переписке Валлиса нет никаких указаний на то, что Броункер когда-либо сообщал ему что-либо об этом методе, кроме нескольких простых