

Итак, пусть наблюдатель зафиксировал частицу, находящуюся в точке S , и включил секундомер. А выключил он его, когда частица через время $n\Delta t$ очутилась в точке F . Промежуточные положения частицы на зигзагообразной траектории, соответствующие фиксированным моментам наблюдения, будем обозначать I_1, I_2, \dots, I_{n-1} . Заметим, что рассматриваемая траектория – это не действительный путь частицы, а чисто условная ломаная линия, вид которой зависит от частоты измерений ее координат. Соединим точку начала изучаемого движения S и две первые промежуточные точки I_1 и I_2 в треугольник SI_1I_2 . Используем геометрическую теорему косинусов, согласно которой имеет место равенство

$$(SI_2)^2 = (SI_1)^2 + (I_1I_2)^2 - 2SI_1 \cdot I_1I_2 \cos j_1,$$

где j_1 – угол при вершине I_1 . Для дальнейшего анализа удобно вместо угла j_1 ввести дополнительный ему угол \mathbf{a}_1 между направлениями смещений SI_1 и I_1I_2 . Тогда $\cos j_1 = \cos(\mathbf{p} - \mathbf{a}_1) = -\cos \mathbf{a}_1$, так что

$$(SI_2)^2 = (SI_1)^2 + (I_1I_2)^2 + 2SI_1 \cdot I_1I_2 \cos \mathbf{a}_1.$$

Целиком аналогично для треугольника SI_2I_3 можно получить соотношение

$$(SI_3)^2 = (SI_2)^2 + (I_2I_3)^2 + 2SI_2 \cdot I_2I_3 \cos \mathbf{a}_2,$$

где \mathbf{a}_2 – угол между направлениями смещений SI_2 и I_2I_3 . Подставляя сюда $(SI_2)^2$ из предыдущего уравнения, получим

$$(SI_3)^2 = (SI_1)^2 + (I_1I_2)^2 + (I_2I_3)^2 + 2SI_1 \cdot I_1I_2 \cos \mathbf{a}_1 + 2SI_2 \cdot I_2I_3 \cos \mathbf{a}_2.$$

Повторяя эту цепочку преобразований вплоть до конечной точки наблюдения F , приходим к уравнению

$$(SF)^2 = (SI_1)^2 + (I_1I_2)^2 + (I_2I_3)^2 + \dots + (I_{n-1}F)^2 + 2SI_1 \cdot I_1I_2 \cos \mathbf{a}_1 + 2SI_2 \cdot I_2I_3 \cos \mathbf{a}_2 + \dots + 2SI_{n-1} \cdot I_{n-1}F \cos \mathbf{a}_{n-1}.$$

Учтем теперь, что в среднем все квадраты смещений частиц за одинаковое время Δt равны между собой:

$$\overline{(SI_1)^2} = \overline{(I_1I_2)^2} = \dots = \overline{(I_{n-1}F)^2} \equiv \overline{(\Delta R)^2}.$$

Это соотношение справедливо именно потому, что, как уже отмечалось выше, время Δt достаточно велико по сравнению со временем τ между столкновениями. Следовательно, каждое выражение в соотношении, соответствующее квадрату смещения за одно и то же время, является результатом многих столкновений. Из этих же соображений равны между собой и сами амплитуды смещений. С другой стороны, благодаря молекулярному хаосу положительные и отрицательные значения множителей $\cos \alpha_i$ в формуле для $(SF)^2$ встречаются с одинаковой вероятностью. Поэтому сумма произведений в правой части формулы будет стремиться к нулю при увеличении числа шагов n , т.е. времени наблюдения $n\Delta t$. В результате средний квадрат смещения броуновской частицы за время наблюдения составит

$$\overline{(SF)^2} \equiv \overline{R^2} = n\overline{(\Delta R)^2}.$$

Если обозначить полное время наблюдения за объектом как $t \equiv n\Delta t$, то это уравнение можно переписать следующим образом:

$$\frac{\overline{R^2}}{t} = \frac{\overline{(\Delta R)^2}}{\Delta t}.$$

Теперь нам становится понятным, почему формула (*) непригодна для описания скорости хаотического движения:

времени t пропорционально не среднее смещение частицы, а его квадрат.

Таким образом, отношение квадрата смещения частицы к соответствующему времени *не зависит* ни от выбора промежутка времени между последовательными наблюдениями, ни от полного времени наблюдения. Однако естественно полагать, что это отношение зависит от свойств окружающей среды и характеристик самой частицы. Кроме того, так как случайная сила определяется тепловым движением молекул, амплитуда смещения за то же время должна возрастать с температурой. Теоретическое рассмотрение задачи о случайном блуждании на основе так называемых дифференциальных уравнений Фоккера–Планка, истоки которых лежат в трудах Эйнштейна и Смолуховского, позволяет выразить обсуждаемое отношение через феноменологический коэффициент диффузии D :

$$\frac{\overline{(\Delta R)^2}}{\Delta t} = 2D.$$

Этот факт не должен нас удивлять, ибо, как отмечал в 1906 году Смолуховский, один и тот же подход пригоден и для анализа блуждания броуновской частицы, и для движения молекулы, в том числе и собственной молекулы среды. В последнем случае процесс блуждания, по определению, является процессом самодиффузии.

Еще раньше, в 1905 году, Эйнштейн рассмотрел броуновское движение при наличии вязкого сопротивления среды с коэффициентом диссипации γ и нашел свое знаменитое соотношение между величинами γ и D :

$$D = \frac{kT}{\gamma},$$

где k – постоянная Больцмана, а T – температура (в кельвинах). Это уравнение дало возможность Перрену экспериментально определить k , а затем и постоянную Авогадро (за что он получил Нобелевскую премию).

В заключение нам осталось лишь указать на один интересный аспект броуновского движения. А именно, если мы увеличим разрешение микроскопа, с помощью которого наблюдаем за броуновской частицей, и уменьшим промежуток времени Δt между последовательными регистрациями положения частицы, то полученная ломаная линия будет подобна первоначальной траектории. Повторение процедуры также приведет к ломаной того же вида. Такое свойство кривых называется самоподобием. Самоподобие кривых свидетельствует о том, что пути случайного блуждания имеют так называемую фрактальную размерность. Последнюю нельзя считать ни единицей (как для обычной кривой), ни двойкой (как у поверхности). Несмотря на отсутствие знакомства непосвященных людей с фракталами, они встречаются в жизни очень часто. Классический пример тому – береговая линия. Чем более пристально в нее вглядываться, тем менее заметные, более мелкомасштабные изгибы обнаруживаются. Особенно это поражает на карте Норвегии, с ее многочисленными разветвляющимися фьордами. Другим примером могут служить дендритные кристаллы – хотя бы снежинки.