Итак, пусть наблюдатель зафиксировал частицу, находящуюся в точке S, и включил секундомер. А выключил он его, когда частица через время $n\Delta t$ очутилась в точке F. Промежуточные положения частицы на зигзагообразной траектории, соответствующие фиксированным моментам наблюдения, будем обозначать $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$. Заметим, что рассматриваемая траектория – это не действительный путь частицы, а чисто условная ломаная линия, вид которой зависит от частоты измерений ее координат. Соединим точку начала изучаемого движения S и две первые промежуточные точки I_1 и I_2 в треугольник SI_1I_2. Используем геометрическую теорему косинусов, согласно которой имеет место равенство

$$(SI_2)^2 = (SI_1)^2 + (I_1I_2)^2 - 2\,SI_1 \cdot I_1I_2 \cos\varphi_1\,,$$

где φ_1 – угол при вершине I_1. Для дальнейшего анализа удобно вместо угла φ_1 ввести дополнительный ему угол α_1 между направлениями смещений SI_1 и I_1I_2. Тогда $\cos\varphi_1 = \cos(\pi - \alpha_1) = -\cos\alpha_1$, так что

$$(SI_2)^2 = (SI_1)^2 + (I_1I_2)^2 + 2\,SI_1 \cdot I_1I_2 \cos\alpha_1\,.$$

Целиком аналогично для треугольника SI_2I_3 можно получить соотношение

$$(SI_3)^2 = (SI_2)^2 + (I_2I_3)^2 + 2\,SI_2 \cdot I_2I_3 \cos\alpha_2\,,$$

где α_2 – угол между направлениями смещений SI_2 и I_2I_3. Подставляя сюда $(SI_2)^2$ из предыдущего уравнения, получим

$$(SI_3)^2 = (SI_1)^2 + (I_1I_2)^2 + (I_2I_3)^2 + {} + 2\,SI_1 \cdot I_1I_2 \cos\alpha_1 + 2\,SI_2 \cdot I_2I_3 \cos\alpha_2\,.$$

Повторяя эту цепочку преобразований вплоть до конечной точки наблюдения F, придем к уравнению

$$(SF)^2 = (SI_1)^2 + (I_1I_2)^2 + (I_2I_3)^2 + \ldots + (I_{n-1}F)^2 + {} + 2\,SI_1 \cdot I_1I_2 \cos\alpha_1 + {} + 2\,SI_2 \cdot I_2I_3 \cos\alpha_2 + \ldots + 2\,SI_{n-1} \cdot I_{n-1}F \cos\alpha_{n-1}\,.$$

Учтем теперь, что *в среднем* все квадраты смещений частички за одинаковое время Δt равны между собой:

$$\overline{(SI_1)^2} = \overline{(I_1I_2)^2} = \ldots = \overline{(I_{n-1}F)^2} \equiv \overline{(\Delta R)^2}\,.$$

Это соотношение справедливо именно потому, что, как уже отмечалось выше, время Δt достаточно велико по сравнению со временем τ между столкновениями. Следовательно, каждое выражение в соотношении, соответствующее квадрату смещения за одно и то же время, является результатом многих столкновений. Из этих же соображений равны между собой и сами амплитуды смещений. С другой стороны, благодаря молекулярному хаосу положительные и отрицательные значения множителей $\cos\alpha_i$ в формуле для $(SF)^2$ встречаются с одинаковой вероятностью. Поэтому сумма произведений в правой части формулы будет стремиться к нулю при увеличении числа шагов n, т.е. времени наблюдения $n\Delta t$. В результате средний квадрат смещения броуновской частицы за время наблюдения составит

$$\overline{(SF)^2} \equiv \overline{R^2} = n\overline{\Delta R}^2\,.$$

Если обозначить полное время наблюдения за объектом как $t \equiv n\Delta t$, то это уравнение можно переписать следующим образом:

$$\frac{\overline{R^2}}{t} = \frac{\overline{(\Delta R)^2}}{\Delta t}\,.$$

Теперь нам становится понятным, почему формула (∗) непригодна для описания скорости хаотического движения: времени t пропорционально не среднее смещение частицы, а его квадрат.

Таким образом, отношение квадрата смещения частицы к соответствующему времени *не зависит* ни от выбора промежутка времени между последовательными наблюдениями, ни от полного времени наблюдения. Однако естественно полагать, что это отношение зависит от свойств окружающей среды и характеристик самой частицы. Кроме того, так как случайная сила определяется тепловым движением молекул, амплитуда смещения за то же время должна возрастать с температурой. Теоретическое рассмотрение задачи о случайном блуждании на основе так называемых дифференциальных уравнений Фоккера–Планка, истоки которых лежат в трудах Эйнштейна и Смолуховского, позволяет выразить обсуждаемое отношение через феноменологический коэффициент диффузии D:

$$\frac{\overline{(\Delta R)^2}}{\Delta t} = 2D\,.$$

Этот факт не должен нас удивлять, ибо, как отмечал в 1906 году Смолуховский, один и тот же подход пригоден и для анализа блуждания броуновской частицы, и для движения молекулы, в том числе и собственной молекулы среды. В последнем случае процесс блуждания, по определению, является процессом самодиффузии.

Еще раньше, в 1905 году, Эйнштейн рассмотрел броуновское движение при наличии вязкого сопротивления среды с коэффициентом диссипации γ и нашел свое знаменитое соотношение между величинами γ и D:

$$D = \frac{kT}{\gamma}\,,$$

где k – постоянная Больцмана, а T – температура (в кельвинах). Это уравнение дало возможность Перрену экспериментально определить k, а затем и постоянную Авогадро (за что он получил Нобелевскую премию).

В заключение нам осталось лишь указать на один интересный аспект броуновского движения. А именно, если мы увеличим разрешение микроскопа, с помощью которого наблюдаем за броуновской частицей, и уменьшим промежуток времени Δt между последовательными регистрациями положения частицы, то полученная ломаная линия будет подобна первоначальной траектории. Повторение процедуры также приведет к ломаной того же вида. Такое свойство кривых называется самоподобием. Самоподобие кривых свидетельствует о том, что пути случайного блуждания имеют так называемую фрактальную размерность. Последнюю нельзя считать ни единицей (как для обычной кривой), ни двойкой (как у поверхности). Несмотря на отсутствие знакомства непосвященных людей с фракталами, они встречаются в жизни очень часто. Классический пример тому – береговая линия. Чем более пристально в нее вглядываться, тем менее заметные, более мелкомасштабные изгибы обнаруживаются. Особенно это поражает на карте Норвегии, с ее многочисленными разветвляющимися фьордами. Другим примером могут служить дендритные кристаллы – хотя бы снежинки.