Физика 9–11

Публикуемая ниже заметка «Поиски минимума в физических задачах» предназначена девятиклассникам, заметка «Снежинки и ледяные узоры на стекле» — десятиклассникам и «Сколько стоит запуск спутника?» — одиннадцатиклассникам.

Поиски минимума в физических задачах

С.СЕРОХВОСТОВ

Готовились как-то девятиклассники Саша, Коля и Петя к районной олимпиаде по физике. Учитель предложил им решить задачу с прошлой олимпиады. Вот ее условие:

Мальчик подошел к последнему вагону электрички в тот момент, когда электричка тронулась и начала двигаться с постоянным ускорением a. Единственная открытая дверь электрички оказалась от мальчика на расстоянии s. Какую наименьшую постоянную скорость должен развить мальчик, чтобы успеть сесть в поезд?

После уроков ребята собрались у Саши дома и стали решать.

– Эта задача решается просто, – сказал Саша. – Давайте выберем систему отсчета так, чтобы начало координат совпадало с начальным положением мальчика, а ось X была направлена вдоль платформы. Пусть мальчик бежал со скоростью v и запрыгнул в вагон через время t. Так как мальчик запрыгнул в эту дверь, то можно записать

$$vt = s + \frac{at^2}{2}\,. \qquad (1)$$

Отсюда мы найдем v.

– Подожди, – сказал Коля, – но у нас одно уравнение, а неизвестных величин две: v и t. Поэтому из этого уравнения мы ничего не найдем!

На это Петя возразил:

– Ну хоть что-нибудь мы найти сможем. Например, давайте выразим скорость:

$$v = \frac{s}{t} + \frac{at}{2}\,. \qquad (2)$$

– А еще нам надо учесть, что скорость должна быть минимально возможной, – напомнил Коля.

Старший брат Саши, который учился в десятом классе, в это время проходил мимо комнаты, в которой сидели ребята, и сказал:

– Если минимум, то нужно искать производную!

– А мы еще ее не проходили,– ответил ему Саша. – И потом, наверное, можно и без производной. Нужно просто узнать, при каком t скорость будет минимальна.

– Придумал! – вскрикнул Коля. – Помните, нам на математике говорили, что всегда справедливо соотношение

$$x + \frac{1}{x} \ge 2\,,$$

причем равенство будет только при $x = 1$. За x можно обозначить любую величину. Например, можно написать, что

$$v = \sqrt{\frac{as}{2}}\left(\frac{1}{t}\sqrt{\frac{2s}{a}} + t\sqrt{\frac{a}{2s}}\right).$$

Теперь положим

$$x = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{2s}{a}} = 1$$

и получим

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}\,,\quad v = \sqrt{2as}\,.$$

– Здорово! – сказал Петя. – Интересно, а можно ли решить другим способом? Давайте рассуждать так. Чем медленнее мальчик будет бежать, тем больше времени он затратит. А при какой-то скорости он вообще не догонит эту дверь. Выразим время из уравнения (1):

$$t = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 2as}}{a}\,.$$

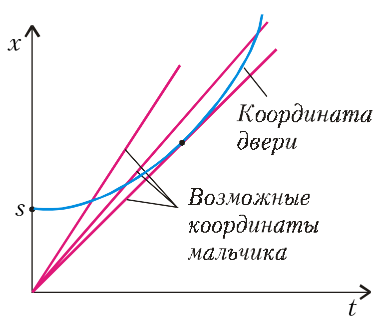
Смотрите, при $v^2 < 2as$ решения не существует, так как выражение под корнем меньше нуля! Значит, минимально возможная скорость определяется равенством

$$v^2 = 2as\,,$$

и ответ совпадает с ответом Коли!

Саша после небольшого раздумья сказал:

– А можно еще и третьим способом решить. Давайте построим графики зависимости координат мальчика и двери от времени. В тот момент, когда они пересекутся, мальчик и догонит дверь поезда.



Саша взял карандаш и сделал рисунок.

– Смотрите, чем меньше наклон графика координаты мальчика, тем медленнее он бежит. Наименьшая скорость, при которой он может добежать до двери, соответствует нижней прямой. А она касается графика координаты двери. Это значит, что для такого случая скорости мальчика и двери в момент запрыгивания одинаковы! Скорость двери мы легко найдем:

$$v_{д} = at\,,$$

откуда

$$t = \frac{v_{д}}{a}\,.$$

Подставим это время в уравнение (1) и получим ответ.

А Сашин брат решил проверить результаты мальчиков – он взял производную по времени от выражения (2) и приравнял ее к нулю:

$$v' = -\frac{s}{t^2} + \frac{a}{2} = 0 .$$

Отсюда он нашел время:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

и, подставив это выражение в формулу (2), получил такой же ответ, как и ребята.

– Молодец у меня брат, да и друзья его тоже молодцы! – подумал он.

На следующий день ребята гордо показали учителю свои решения. Учитель их похвалил.

– Молодцы! Вы не только получили решение, но и рассмотрели различные методы решения задач на минимум. Ты, Коля, преобразовал выражение к виду, для которого мы знаем минимум. Ты, Петя, рассмотрел область допустимых значений выражения. Ты, Саша, проанализировал решение графически и нашел точки касания графиков. Ну а твой брат, Саша, предложил способ решения с помощью производной. Он наиболее универсален, но иногда другие методы проще для вычислений. Я же могу предложить еще один способ. Давайте перейдем в систему отсчета, которая связана с мальчиком. В этой системе начальная скорость открытой двери равна $-v$, ее начальная координата s, ускорение a, и поэтому зависимость координаты открытой двери x_1 от времени имеет вид

$$x_1 = s - vt + \frac{at^2}{2} . \qquad (3)$$

Условием того, что мальчик добежит до двери, будет равенство

$$x_1 = 0 ,$$

т.е. в этот момент парабола (3) пересечет ось абсцисс на координатной плоскости (x_1, t). Но наименьшая скорость соответствует случаю, когда парабола коснется оси t. Вам остается только найти выражение для координат вершины параболы и приравнять x_1 к нулю. Но это вы должны будете проделать самостоятельно и сравнить с вашими ответами. А метод, который использовал я, можно назвать методом перехода в другую систему отсчета.