

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2003 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5–2002» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1831» или «Ф1838». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1836–М1838 предлагались на XXVIII Всероссийской математической олимпиаде.

Задачи Ф1838, Ф1841 – Ф1845 и Ф1847 предлагались на XXXVI Всероссийской физической олимпиаде.

Задачи М1831–М1840, Ф1838–Ф1847

М1831. В наборе 20 гирек, массы которых различны. Среди любых одиннадцати из них можно выбрать две, общая масса которых равна 100 г. Докажите, что общая масса всех 20 гирек набора равна 1000 г.

В.Произволов

М1832. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон в точках A' , B' , C' (рис.1). Точка Q – середина $A'B'$. Докажите, что углы $B'C'C$ и $A'C'Q$ равны.

А.Заславский

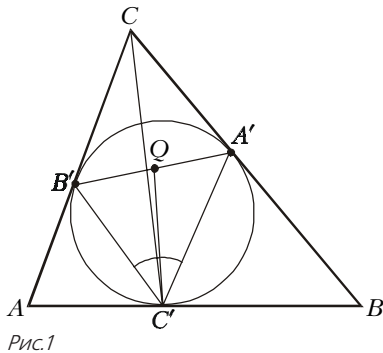


Рис.1

М1833. Фигура «танк» ходит по горизонтали или вертикали ровно на n клеток ($n > 1$), закрашивая все клетки, по которым прошла. Сделав несколько

ходов на бесконечной клетчатой доске, «танк» вернулся на исходную позицию. Оказалось, что его след нигде себя не пересек. При каких n площадь, ограниченная следом «танка», может оказаться равной 2002?

А.Малеев, С.Волченков

М1834. Для действительных чисел x , y , z докажите неравенства

$$\begin{aligned} \text{а) } x^6 y^6 + x^6 z^6 + y^6 z^6 + 3x^4 y^4 z^4 &\geq \\ &\geq 2(x^3 + y^3 + z^3)x^3 y^3 z^3; \end{aligned}$$

$$\text{б) } x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2 y^2 z^2 \geq 2(x^3 y^3 + x^3 z^3 + y^3 z^3).$$

Ф.Шлейфер

М1835. Около четырехугольника можно описать окружность и в него можно вписать окружность. Через центр вписанной окружности проведена прямая, параллельная какой-либо стороне четырехугольника, две его противоположные стороны отсекают на ней отрезок. Докажите, что длина отсекаемого отрезка равна четверти периметра четырехугольника.

В.Произволов

М1836. Гидры состоят из голов и шей (любая шея соединяет ровно две головы). Одним ударом меча можно снести все шеи, выходящие из какой-то головы A гидры. Но при этом из головы A мгновенно вырастает по одной шее во все головы, с которыми A не была соединена. Геракл победит гидру, если ему удастся разрубить ее на две не связанные шеями части. Найдите наименьшее N , при котором Геракл сможет победить любую стошею гидру, нанеся не более чем N ударов.

Ю.Лифшиц

М1837. Докажите, что для любого натурального числа $n > 10000$ найдется такое натуральное число m , представимое в виде суммы двух квадратов, что $0 < m - n < 3\sqrt[4]{n}$.

А.Голованов

М1838. На плоскости взято конечное число красных и синих прямых, среди которых нет параллельных, так, что через любую точку пересечения одноцветных прямых проходит прямая другого цвета. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.

В.Дольников, И.Богданов

M1839. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{4}$. Докажите, что

$$(\cos x)^{\cos^2 x} > (\sin x)^{\sin^2 x},$$

а также

$$(\cos x)^{\cos^4 x} < (\sin x)^{\sin^4 x}.$$

В. Сендеров

M1840. В сферу вписаны несколько правильных тетраэдров так, что каждые два из них имеют общую вершину. Докажите, что все тетраэдры имеют общую вершину.

В. Произволов

Ф1838. У вертикальной стены стоит палочка AB длиной L (рис.2). На ее нижнем конце B сидит жук. В тот момент, когда конец B начали двигать вправо по полу с постоянной скоростью v , жук пополз по палочке с постоянной скоростью u относительно нее. На какую максимальную высоту над полом поднимется жук за время своего движения по палочке, если ее верхний конец не отрывается от стенки?

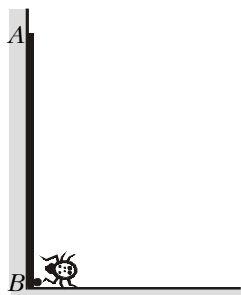


Рис.2

С. Кузьмичев

Ф1839. На гладком столе покоится гантелька, состоящая из жесткого легкого стержня длиной L и двух маленьких одинаковых шариков на концах стержня. В начальный момент гантелька ориентирована с севера на юг. На один из шариков начинает действовать постоянная сила \vec{F} , все время направленная на восток. Найдите скорости шариков в тот момент, когда гантелька повернется на 90° . Найдите также силу натяжения стержня в этот момент. Масса каждого шарика M .

З. Рафаилов

Ф1840. Маятник состоит из длинного легкого стержня длиной L , шарнирно закрепленного за один из концов. К другому концу стержня прикреплено велосипедное колесо радиусом R , вся масса которого сосредоточена в его ободе. Колесо может свободно вращаться вокруг своей оси. Стержень отводят на небольшой угол от вертикали и отпускают так, что он может совершить колебания в плоскости, которая перпендикулярна оси колеса. Найдите период таких колебаний. Как изменится этот период, если в оси колеса будет большое трение, не позволяющее ему вращаться?

А. Зильберман

Ф1841. С помощью бензиновой горелки в помещении поддерживается температура $t_1 = -3^\circ\text{C}$ при температуре на улице $t_2 = -23^\circ\text{C}$. Предполагается использовать бензин в движке с КПД $\eta = 0,4$, а с помощью полученной механической энергии запустить тепловой насос, перекачивающий по идеальному холодильному циклу тепло с улицы в комнату. Какую температуру удастся в таком случае поддерживать в помещении при прежнем расходе бензина? Движок находится вне помещения.

В. Белонучкин

Ф1842. Две тонкие медные проволоки одинаковой длины соединили параллельно и подключили последо-

вательно с лампочкой к источнику постоянного напряжения. Первая проволока нагрелась на 16°C выше комнатной температуры, а вторая – в $\alpha = 2$ раза меньше. На сколько градусов выше комнатной температуры нагреются проволоки, если их параллельное соединение заменить последовательным? Сопротивление каждой из проволок много меньше сопротивления лампочки и источника, зависимость сопротивления проволок от температуры не учитывать.

В. Ефимов

Ф1843. Частица массой m с зарядом q движется с постоянной по модулю скоростью в области пространства, где имеются три взаимно перпендикулярных поля: электрическое с напряженностью \vec{E} , магнитное с индукцией \vec{B} и поле тяжести \vec{g} (рис.3). В некоторый момент поля \vec{E} и \vec{B} выключают. Минимальная кинетическая энергия частицы в процессе движения составляет половину начальной. Найдите проекции скорости частицы на направления всех трех полей в момент выключения.

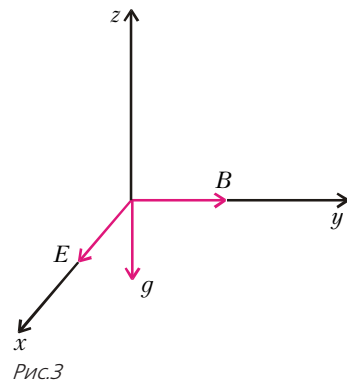


Рис.3

А. Шеронов

Ф1844. Коллекторный двигатель питается от источника постоянного напряжения $U = 12$ В. На холостом ходу сила тока через обмотки ротора равна $I_1 = 4$ А. Когда ротор затормозили до полной остановки, сила тока увеличилась до $I_2 = 24$ А. Какую наибольшую полезную механическую мощность можно получить с помощью этого двигателя, если магнитное поле в нем создается постоянными магнитами, а момент сил трения в подшипниках ротора не зависит от скорости его вращения и от механической нагрузки?

В. Ефимов

Ф1845. С одной из пластин изначально незаряженного конденсатора, подключенного выводами к катушке индуктивностью L , мгновенно отделяется тонкий слой вещества, несущий заряд q . Затем он движется поступательно с постоянной скоростью v по направлению к противоположной пластине (рис.4). Найдите зависимость тока через катушку от времени, пока слой движется в конденсаторе.

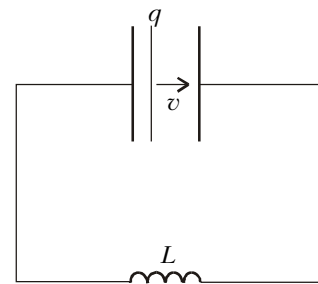


Рис.4

Расстояние между пластинами конденсатора d , площадь поперечного сечения пластин S .

В. Можав

Ф1846. Два одинаковых трансформатора содержат по две обмотки, одна из которых имеет в 2 раза больше витков, чем другая. Одну из обмоток первого

трансформатора подключают к сети переменного напряжения 220 В, к другой обмотке этого трансформатора подсоединяют последовательно с резистором сопротивлением 200 Ом одну из обмоток второго трансформатора, а к выводам второй обмотки этого трансформатора подключают идеальный амперметр переменного тока. Что покажет прибор?

Р.Александров

Ф1847. Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли оптическую схему, на которой были изображены линза, предмет и его изображение. От времени чернила высохли, и остался только предмет на масштабной сетке (рис.5). Из текста следует, что предмет

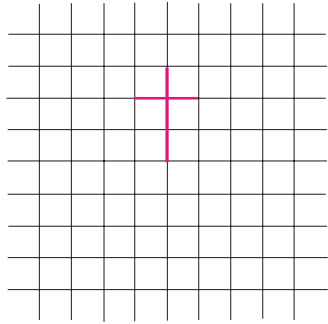


Рис.5

и изображение одинаковых размеров и формы, а главная оптическая ось линзы параллельна некоторым линиям масштабной сетки. Восстановите оптическую схему (изображение, линзу, фокусы).

А.Чудновский