IX Межобластная заочная математическая олимпиада школьников

Всероссийская школа математики и физики «АВАНГАРД» совместно с Министерством образования РФ и при участии журнала «КВАНТ» проводит очередную Межобластную заочную математическую олимпиаду для школьников 6–10 классов. Срок проведения олимпиады октябрь – декабрь 2002 года.

Чтобы принять участие в олимпиаде, нужно в течение недели после получения этого номера журнала решить предлагаемые ниже задачи, аккуратно оформить решения (каждую задачу – на отдельном листочке) и отослать их по почте в обычном почтовом конверте в Оргкомитет олимпиады по адресу: 115446 Москва, а/я 450, Оргкомитет, «М-КВАНТ – номер класса».

В письмо вложите два пустых маркированных конверта с написанным домашним адресом.

Заметим, что для успешного участия в олимпиаде необязательно решить все задачи – достаточно хотя бы одной. Победители олимпиады получат призы, среди которых несколько бесплатных подписок на журнал «КВАНТ». (Оргкомитет приложит все усилия к тому, чтобы поощрения и дипломы получили все приславшие хотя бы одно правильное решение.)

Все учащиеся, приславшие свои работы в Оргкомитет олимпиады, независимо от результатов их проверки, получат приглашение учиться на заочном отделении Всероссийской школы математики и физики «АВАНГАРД» в 2002/03 учебном году.

ВНИМАНИЮ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ 6–10 КЛАССОВ! ПРИГЛАСИТЕ К УЧАСТИЮ В ОЛИМПИАДЕ СВОИХ УЧЕНИКОВ!

Задачи олимпиады

6 класс

1. На прямой через равные промежутки поставили 10 точек, и они заняли отрезок длиной l. На другой прямой через такие же промежутки поставили 100 точек, и они заняли отрезок длиной L. Во сколько раз L больше l?

2. Вот очень простая

$$\text{Г} + \text{О} = \text{Л} - \text{О} = \text{В} \times \text{О} = \text{Л} - \text{О} = \text{М} - \text{К} = \text{А}.$$

Замените буквы цифрами так, чтобы получились верные равенства; при этом одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, а разным – разные.

3. В классе учатся менее 50 школьников. За контрольную работу $1/7$ учеников получили пятерки, $1/3$ – четверки, $1/2$ – тройки. Остальные работы оказались неудовлетворительными. Сколько было таких работ?

4. На лугу растет трава. Пустили на луг 9 коров – они опустошили луг за 4 дня. Если бы на луг пустили 8 коров, то они съели бы всю траву за 6 дней. Сколько коров могут кормиться на лугу все время, пока растет трава?

5. На клетке e1 шахматной доски находится белый конь, а на клетке d8 – черный конь. Первый ход белый конь может сделать либо на d3, либо на f3, а черный конь – только на e6. Второй ход белого коня может быть сделан на любую доступную для него клетку. Какова вероятность того, что белый конь окажется под боем черного коня?

Комментарий. Вероятность $P(A)$ события A – того, что белый конь в итоге окажется под боем черного коня, равна $P(A) = n_A/N$, где n_A – общее число возможных маршрутов белого коня за два хода, приводящих к событию A, а N – число всех возможных маршрутов белого коня за два хода.

7 класс

1. На противоположных берегах реки напротив друг друга растут две пальмы. Высота одной из них 10 м, другой 15 м, а расстояние между основаниями пальм 25 м. На верхушке каждой пальмы сидит птица. Внезапно обе птицы заметили рыбу, выплывшую на поверхность реки между пальмами. Птицы бросились к рыбе и достигли ее одновременно. На каком расстоянии от основания более высокой пальмы выплыла рыба?

2. Найдите наименьшие натуральные числа a, b ($b > 1$), удовлетворяющие равенству

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = b.$$

3. Известно, что $n - 1$ делится на 15, а 1001 делится на $n + 1$. Найдите n.

4. Вася на вопрос, каков номер его квартиры, ответил так: «Если все шесть двузначных чисел, которые можно образовать из цифр номера, сложить, то половина полученной суммы составит как раз номер моей квартиры». В какой квартире живет Вася?

5. На клетке e1 шахматной доски находится белая шашка, а на клетке d8 – черная. Два игрока по очереди независимо друг от друга перемещают шашки на одну клетку вперед по диагонали налево или направо. Какова вероятность того, что после трех ходов шашки окажутся на соседних клетках?

Комментарии. 1) Если шашка имеет n возможных маршрутов движения, то вероятность любого их них равна $1/n$.

2) Вероятность попадания шашки на конкретную клетку, например на клетку d4 – $P(\text{d4})$, равна сумме вероятностей маршрутов, ведущих на эту клетку.

3) Вероятность комбинации типа «белая шашка на d4, черная на h5» равна $P(\text{d4}, \text{h5}) = P(\text{d4}) \cdot P(\text{h5})$.

4) Вероятность того, что шашки окажутся на соседних клетках, равна сумме вероятностей всех комбинаций, при которых это происходит.

8 класс

1. В равенстве

$$(р + о + м + а)^4 = \overline{рома}$$

определите число $\overline{рома}$.

2. Найдите, сколько вулканов насчитывается на планете, если в искомом числе десятков на 3 больше, чем сотен, а единиц на 4 меньше, чем десятков, причем полусумма всех цифр числа равна цифре десятков.

3. Сколькими разными способами из листа клетчатой бумаги $m \times n$ можно вырезать прямоугольник со сторонами, идущими по линиям сетки?

4. Найдите все целые n, при которых модуль трехчлена $n^2 - 7n + 10$ является простым числом.

5. Два игральных кубика бросают два раза подряд. Какова вероятность $P(A)$ события A – того, что оба раза выпадет одна и та же сумма очков?

Комментарии. 1) Вероятность выпадения определенной суммы очков при бросании двух кубиков равна n/N, где n – число тех комбинаций очков на кубиках, которые дают эту сумму, а N – число всех возможных комбинаций очков на кубиках.

2) Вероятность комбинации типа «при первом бросании в сумме выпало 10, а при втором – 6 очков» равна

$$P(10,6) = P(10) \cdot P(6),$$

где $P(10)$ – вероятность выпадения 10 очков в первом броске, а $P(6)$ – вероятность выпадения 6 очков во втором броске.

3) Искомая вероятность $P(A)$ равна сумме вероятностей всех комбинаций, приводящих к событию A.

9 класс

1. Прогуливаясь по городу, трое студентов-математиков заметили, что водитель автомашины грубо нарушил правила уличного движения. Номер машины (четырехзначный) студенты не запомнили, но каждый из них приметил по одной его особенности:

1) две первые цифры числа были одинаковы;
2) две последние цифры совпадали;
3) число являлось точным квадратом.

Можно ли по этим данным узнать номер машины?

2. Для нумерации страниц книги потребовалось всего 1392 цифры. Сколько страниц в этой книге?

3. Решите в целых числах уравнение

$$xy + 3x - 5y = -3.$$

4. Найдите сумму

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 7 \cdot 9 + \ldots + 999 \cdot 1001 .$$

5. Решите уравнение

$$4x^2 - 4x - 3 = 4\left[\frac{2x-1}{2}\right].$$

(Здесь квадратные скобки означают целую часть числа.)

10 класс

1. Можно ли к числу 9999 приписать справа еще четыре цифры так, чтобы полученное восьмизначное число стало квадратом целого числа?

2. Найдите все тройки целых чисел x, y, z, удовлетворяющие системе неравенств

$$x^2 < y, \quad y^2 < z, \quad z^2 < x .$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ldots + 9x_9 + 10x_{10} = 55, \\ x_2 + 2x_3 + \ldots + 9x_{10} + 10x_1 = 55, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{10} + 2x_1 + \ldots + 9x_8 + 10x_9 = 55. \end{cases}$$

4. Решите в целых числах уравнение

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y .$$

5. Найдите наименьшее значение выражения

$$2x^2 - 2xy + 5y^2 + 2x + 2y .$$