XXVIII Всероссийская олимпиада школьников по математике

В этом году четвертый, окружной этап Всероссийской математической олимпиады проходил с 26 по 30 марта в шести городах: Владивостоке, Кемерове, Ижевске, Волгограде, Вологде, Долгопрудном, а пятый, заключительный этап олимпиады проводился с 21 по 29 апреля в Майкопе – столице Республики Адыгея. В заключительном этапе приняли участие 77 школьников, выступавших по программе 9 класса (из них три семиклассника и пятнадцать восьмиклассников!), 55 – по программе 10 класса и 67 – по программе 11 класса.

Отметим успешное выступление на олимпиаде семиклассника Саши Магазинова из Ярославля, получившего диплом II степени по девятому классу. Гостями олимпиады были школьники из Китая, представлявшие специализированную математическую Северо-Восточную Юйцай школу. Они выступили очень успешно, завоевав один диплом I степени, один – II степени и четыре – III степени.

По мнению участников, лучшими задачами олимпиады были задачи 6 для 9 класса, 8 для 10 класса и 4 для 11 класса. По результатам олимпиады была сформирована команда России для участия в XLIII Международной математической олимпиаде, которая в этом году состоится в Великобритании, в Глазго. В команду вошли Андрей Халявин (Киров), Михаил Дубашинский (Санкт-Петербург), Андрей Бадзян (Челябинск), Олег Гольберг (Ростов-на-Дону), Олег Стырт (Омск), Кирилл Сухов (Санкт-Петербург).

В заключение организаторы олимпиады выражают благодарность спонсору заключительного этапа – Исполкому СПС.

Задачи олимпиады

Окружной этап

8 класс

1. Можно ли все клетки таблицы 9×2002 заполнить натуральными числами так, чтобы сумма чисел в любом столбце и сумма чисел в любой строке были бы простыми числами?

О.Подлипский

2. Клетки квадрата 9×9 окрашены в красный и синий цвета. Докажите, что найдется клетка, у которой ровно два красных соседа по углу, или клетка, у которой ровно два синих соседа по углу (или и то и другое).

Ю.Лифшиц

3. Имеется 11 пустых коробок. За один ход можно положить по одной монете в какие-то 10 из них. Играют двое, ходят по очереди. Побеждает тот, после хода которого впервые в одной из коробок окажется 21 монета. Кто выигрывает при правильной игре?

И.Рубанов

4. Дан треугольник ABC с попарно различными сторонами. На его сторонах построены внешним образом правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ не может быть правильным.

Ю.Лифшиц

5. Написанное на доске четырехзначное число можно заменить на другое, либо прибавив к двум его соседним цифрам по единице, если ни одна из этих цифр не равна 9, либо вычтя из соседних двух цифр по единице, если ни одна из них не равна 0. Можно ли с помощью таких операций из числа 1234 получить число 2002?

Н.Агаханов

6. Каждую сторону выпуклого четырехугольника продолжили в обе стороны и на всех восьми продолжениях отложили равные между собой отрезки. Оказалось, что получившиеся 8 точек – внешние концы построенных отрезков – различны и лежат на одной окружности. Докажите, что исходный четырехугольник – квадрат.

Н.Агаханов

7. По шоссе мимо наблюдателя проехали «Москвич», «Запорожец» и двигавшаяся им навстречу «Нива». Известно, что когда с наблюдателем поравнялся «Москвич», то он был равноудален от «Запорожца» и «Нивы», а когда с наблюдателем поравнялась «Нива», то она была равноудалена от «Москвича» и «Запорожца». Докажите, что «Запорожец» в момент проезда мимо наблюдателя был равноудален от «Нивы» и «Москвича». (Скорости автомашин считаем постоянными. В рассматриваемые моменты равноудаленные машины находились по разные стороны от наблюдателя.)

С.Токарев

8. Среди 18 деталей, выставленных в ряд, какие-то три подряд стоящие имеют массу по 99 г., а все остальные – по 100 г. Двумя взвешиваниями на весах со стрелкой определите все 99-граммовые детали.

С.Токарев

9 класс

1. См. задачу 2 для 8 класса.

2. Приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами в трех последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере еще в одной целой точке.

Н.Агаханов

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) точка O – центр описанной окружности. Точка M лежит на отрезке BO, точка M' симметрична M относительно середины AB. Точка K – точка пересечения $M'O$ и AB. Точка L на стороне BC такова, что $\angle CLO = \angle BLM$. Докажите, что точки O, K, B, L лежат на одной окружности.

С.Злобин

4. На плоскости расположены $\left[\frac{4}{3}n\right]$ прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что любой прямоугольник пересекается хотя бы с n прямоугольниками. Докажите, что найдется прямоугольник, пересекающийся со всеми. (Как обычно, $[x]$ означает целую часть числа x.)

В.Дольников

5. Можно ли расставить по кругу числа 1, 2, …, 60 в таком порядке, чтобы сумма любых двух чисел, между которыми находится одно число, делилась на 2, сумма любых двух чисел, между которыми находятся два числа, делилась на 3, …, сумма любых двух чисел, между которыми находятся шесть чисел, делилась на 7?

И.Рубанов

6. Пусть A' – точка на одной из сторон трапеции $ABCD$ такая, что прямая AA' делит площадь трапеции пополам. Точки B', C', D' определяются аналогично. Докажите, что точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ симметричны относительно середины средней линии трапеции $ABCD$.

Л.Емельянов

7. На отрезке [0; 2002] отмечены его концы и точка с координатой d, где d – взаимно простое с 1001 число. Разрешается отметить середину любого отрезка с концами в отмеченных точках, если ее координата целая. Можно ли, повторив несколько раз эту операцию, отметить все целые точки на отрезке?

И.Богданов, О.Подлипский

8. См. задачу 8 для 8 класса.

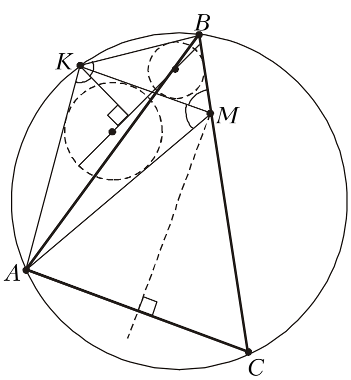
10 класс

1. Какова наибольшая длина арифметической прогрессии из натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с разностью 2, обладающей свойством: a_k^2+1 – простое при всех $k = 1, 2, \ldots, n$?

Н.Агаханов

2. В выпуклом многоугольнике на плоскости содержится не меньше m^2+1 точек с целыми координатами. Докажите, что в нем найдется $m + 1$ точка с целыми координатами, которые лежат на одной прямой.

В.Дольников



3. Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке M (см. рисунок). Биссектриса угла AMB пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K. Докажите, что прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников AKM и BKM, перпендикулярна биссектрисе угла AKB.

С.Берлов

4. Набор чисел $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям: $a_0=0$, $0 \le a_{n+1}-a_n \le 1$. Докажите неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^3 \le \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2.$$

А.Храбров

5. На оси Ox произвольно расположены различные точки $X_1, \ldots, X_n$, $n \ge 3$. Построены все параболы, задаваемые приведенными квадратными трехчленами и пересекающие ось Ox в данных точках (и не пересекающие ось в других точках). Пусть $y=f_1, \ldots, y=f_m$ – функции, задающие эти параболы. Докажите, что парабола $y=f_1+\ldots+f_m$ пересекает ось Ox в двух точках.

Н.Агаханов

6. См. задачу 6 для 9 класса.

7. На отрезке [0; 2002] отмечены его концы и $n - 1 > 0$ целых точек так, что длины отрезков, на которые разбился отрезок [0; 2002], взаимно просты в совокупности. Разрешается разделить любой отрезок с концами в отмеченных точках на n равных частей и отметить точки деления, если они все целые. (Точку можно отметить второй раз, при этом она остается отмеченной). Можно ли, повторив несколько раз эту операцию, отметить целые точки на отрезке?

И.Богданов, О.Подлипский

8. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить все клетки доски размера 10×10 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце находились клетки не более чем пяти различных цветов?

Д.Храмцов

11 класс

1. Действительные числа x и y таковы, что для любых различных простых нечетных p и q число $x^p + y^q$ рационально. Докажите, что x и y рациональны.

Н.Агаханов

2. Высота четырехугольной пирамиды $SABCD$ проходит через точку пересечения диагоналей ее основания $ABCD$. Из вершин основания опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на прямые SC, SD, SA и SB соответственно. Оказалось, что точки S, A_1, B_1, C_1, D_1 различны и лежат на одной сфере. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 проходят через одну точку.

Н.Агаханов

3. Набор чисел $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям: $a_0=0$, $a_{n+1} \ge a_n+1$. Докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 \ge \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2.$$

А.Храбров

4. Клетчатая плоскость раскрашена в n^2 цветов так, что в любом квадрате из $n\times n$ клеток встречаются все цвета. Известно, что в какой-то строке встречаются все цвета. Докажите, что существует столбец, раскрашенный ровно в n цветов.

И.Богданов, Г.Челноков

5. Пусть $P(x)$ – многочлен нечетной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x))=0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x)=0$.

И.Рубанов

6. На плоскости даны $n > 1$ точек. Двое по очереди соединяют еще не соединенную пару точек вектором одного из двух возможных направлений. Если после очередного хода какого-то игрока сумма всех нарисованных векторов нулевая, то выигрывает второй; если же ходить больше некуда, а нулевой суммы не было, то первый. Кто выигрывает при правильной игре?

Н.Агаханов

7. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, и проведены биссектрисы l_A, l_B, l_C, l_D внешних углов этого четырехугольника. Прямые l_A и l_B пересекаются в точке K, прямые l_B и l_C – в точке L, прямые l_C и l_D – в точке M, прямые l_D и l_A – в точке N. Докажите, что если окружности, описанные около треугольников ABK и CDM, касаются внешним образом, то и окружности, описанные около треугольников BCL и DAN, касаются внешним образом.

Л.Емельянов

8. На отрезке $[0; N]$ отмечены его концы и еще 2 точки так, что длины отрезков, на которые разбился отрезок $[0; N]$, целые и взаимно простые в совокупности. Если нашлись две отмеченные точки A и B такие, что расстояние между ними кратно 3, то можно разделить отрезок AB на 3 равные части, отметить одну из точек деления и стереть одну из точек A или B. Верно ли, что за несколько таких действий можно отметить любую наперед заданную целую точку отрезка $[0; N]$?

И.Богданов, О.Подлипский

Заключительный этап

9 класс

1. Можно ли в клетках таблицы 2002×2002 расставить натуральные числа от 1 до 2002^2 так, чтобы для любой клетки этой таблицы из строки или из столбца, содержащих эту клетку, можно было бы выбрать тройку чисел, одно из которых равно произведению двух других?

Н.Агаханов

2. На одной стороне угла с вершиной O взята точка A, а на другой – точки B и C так, что B лежит между O и C. Проведена окружность с центром O_1, вписанная в треугольник OAB, и окружность с центром O_2, касающаяся стороны AC и продолжений сторон OA, OC треугольника OAC. Докажите, что если $O_1A = O_2A$, то треугольник ABC равнобедренный.

Л.Емельянов

3. На плоскости отмечены 6 красных, 6 синих и 6 зеленых точек, причем никакие три из отмеченных точек не лежат на одной прямой. Докажите, что сумма площадей треугольников с вершинами одного цвета составляет не более четверти суммы площадей всех треугольников с отмеченными вершинами.

Ю.Лифшиц

4. См. задачу М1836 «Задачника «Кванта».

5. На шахматной доске стоят 8 ладей, не бьющих друг друга. Докажите, что среди попарных расстояний между ними найдутся два одинаковых. (Расстояние между ладьями – это расстояние между центрами клеток, в которых они стоят.)

Д.Кузнецов

6. Имеются одна красная и k $(k > 1)$ синих ячеек, а также колода из $2n$ карт, занумерованных числами от 1 до $2n$. Первоначально вся колода лежит в произвольном порядке в красной ячейке. Из любой ячейки можно взять верхнюю карту и переложить ее либо в пустую ячейку, либо поверх карты с номером, большим на единицу. При каком наибольшем n можно такими операциями переложить всю колоду в одну из синих ячеек?

А.Белов

7. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно таким образом, что $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC.

С.Берлов

8. Из промежутка $\left(2^{2n}; 2^{3n}\right)$ выбрано $2^{2n-1}+1$ нечетное число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, квадрат каждого из которых не делится на другое.

С.Берлов

10 класс

1. Многочлены P, Q и R с действительными коэффициентами, среди которых есть многочлен второй степени и многочлен третьей степени, удовлетворяют равенству

$$P^2 + Q^2 = R^2 .$$

Докажите, что все корни одного из многочленов третьей степени действительные.

А.Голованов

2. Дан четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность w. Касательная к w, проведенная через A, пересекает продолжение стороны BC за точку B в точке K, а касательная к w, проведенная через B, пересекает продолжение стороны AD за точку A в точке M. Известно, что $AM = AD$ и $BK = BC$. Докажите, что $ABCD$ – трапеция.

С.Берлов

3. См. задачу М1837 «Задачника «Кванта».

4. В некотором государстве было 2002 города, соединенных дорогами так, что если запретить проезд через любой из городов, то из любого из оставшихся городов можно добраться до любого другого. Каждый год король выбирает некоторый несамопересекающийся циклический маршрут и приказывает построить новый город, соединить его дорогами со всеми городами выбранного маршрута, а все дороги этого маршрута закрыть за ненадобностью. Через несколько лет в стране не осталось ни одного несамопересекающегося циклического маршрута, проходящего по ее городам. Докажите, что в этот момент количество городов, из которых выходит ровно одна дорога, не меньше 2002.

А.Пастор

5. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите, что

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \ge ab + bc + ac .$$

С.Злобин

6. См. задачу 6 для 9 класса.

7. Пусть A' – точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. Прямая a проходит через точку A' и параллельна биссектрисе внутреннего угла A. Аналогично строятся прямые b и c. Докажите, что a, b и c пересекаются в одной точке.

Л.Емельянов

8. См. задачу М1838 «Задачника «Кванта».

11 класс

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. На плоскости отмечены несколько точек. Для любых трех из них существует декартова система координат (т.е. перпендикулярные оси и общий масштаб), в которой эти точки имеют целые координаты. Докажите, что существует декартова система координат, в которой все отмеченные точки имеют целые координаты.

С.Берлов

3. Докажите. что для всех $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ при $n > m$, где n, m – натуральные, справедливо неравенство

$$2\left|\sin^n x - \cos^n x\right| \le 3\left|\sin^m x - \cos^m x\right| .$$

В.Сендеров

4. В городе несколько площадей. Некоторые пары площадей соединены улицами с односторонним движением так, что с каждой площади можно выехать ровно по двум улицам.

Докажите, что город можно разделить на 1014 районов так, чтобы улицами соединялись только площади из разных районов, и для любых двух районов все соединяющие их улицы были направлены одинаково (либо все из первого района во второй, либо наоборот).

А.Пастор

5. Найдите наименьшее натуральное число, представимое в виде суммы 2002 натуральных слагаемых с одинаковой суммой цифр.

С.Токарев

6. Пусть $ABCD$ – вписанный четырехугольник, O – точка пересечения диагоналей AC и BD. Пусть окружности, описанные около $\triangle ABO$ и $\triangle COD$, пересекаются в точке K. Точка L такова, что $\triangle BLC$ подобен $\triangle AKD$. Докажите, что если четырехугольник $BLCK$ выпуклый, то он является описанным.

С.Берлов

7. См. задачу М1838 «Задачника «Кванта».

8. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, для которых числитель несократимой дроби, равной $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$, не является степенью простого числа с натуральным показателем.

Ф.Петров

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, П.Кожевников, Д.Терешин

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Данилова Юлия – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Петухова Надежда – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»;

по 10 классам –

Травкин Роман – Липецк, школа 5,
Молчанов Евгений – Краснодар, школа 64;

по 11 классам –

Халявин Андрей – Киров, ФМЛ.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Пермяков Дмитрий – Снежинск, школа 127,
Трущин Дмитрий – Саров, гимназия 2,
Лазарев Алексей – Киров, ФМЛ,
Родин Александр – Ижевск, ИЕГЛ «Школа-30»,
Исаев Михаил – Барнаул, гимназия 42,
Березняк Тарас – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Плюхин Анатолий – Сущёво Костромской обл., Сущевская средняя школа,
Засорин Александр – Ростов-на-Дону, школа 92,
Кирьянов Александр – Краснодар, школа 88,
Мешин Юрий – Киров, ФМЛ,
Акулов Ярослав – Саров, лицей 3,
Тихонова Анна – Якутск, Республиканский колледж,
Тимофеев Алексей – Ижевск, ГЕЛ 41,
Магазинов Александр – Ярославль, школа 33, 7 кл.;

по 10 классам –

Щипцов Владислав – Луга, школа 3,
Куюмжиян Каринэ – Ростов-на-Дону, школа 8,
Куликов Антон – Нижний Новгород, лицей 165,
Горин Вадим – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Гравин Николай – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Костин Андрей – Челябинск, ФМЛ 31,
Вальтман Виталий – Санкт-Петербург, АГ СПбГУ,
Ланин Константин – Иркутск, лицей 2,
Волков Юрий – Кемерово, городской классический лицей,
Ефремов Михаил – Ижевск, ЭМЛИ 29,
Вершинина Анастасия – Киров, ФМЛ,
Антипов Дмитрий – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Старолетов Алексей – Барнаул, гимназия 42,
Кузнецов Кирилл – Нижний Новгород, лицей 40,
Красильников Павел – Краснодар, школа 2,
Ломоносов Роман – Краснодар, школа 89,
Томин Дмитрий – Иваново, лицей 33,
Сухарев Николай – Тобольск, гимназия 10;

по 11 классам –

Гольберг Олег – Ростов-на-Дону, школа 8,
Бадзян Андрей – Челябинск, ФМЛ 31, 9 кл.,
Дубашинский Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Куликов Егор – Ярославль, школа 33,
Стырт Олег – Омск, лицей 64,
Сухов Кирилл – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Миргасимов Алмаз – Набережные Челны, гимназия 26, 10 кл.,
Жеребцов Николай – Калуга, школа 46,
Корсаков Артем – Копейск, школа 31,
Жданов Роман – Краснодар, лицей КубГТУ,
Калитка Владислав – Краснодар, школа 39,
Кудряшов Юрий – Рязань, СУНЦ МГУ.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Шнурников Игорь – Краснодар, школа 36,
Трегубов Олег – Киров, ФМЛ, 8 кл.,
Чихачев Кирилл – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Кислицын Евгений – Киров, ФМЛ,
Мартынов Павел – Нижний Новгород, Педагогическая гимназия, 8 кл.,
Филимонов Владислав – Екатеринбург, школа 9,
Альминов Евгений – Киров, ФМЛ,
Покаташкин Павел – Снежинск, гимназия 127,
Котова Татьяна – Самара, университет Наяновой, 8 кл.,
Никитин Сергей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Герасимов Константин – Екатеринбург, гимназия 9,
Тихонов Иннокентий – Якутск, Республиканский колледж,
Козлов Павел – п.Шурскол Ярославской обл., гимназия г.Ростова, 8 кл.,
Лугинин Иван – с.Высокораменское Кировской обл., школа,
Мурашкин Михаил – Протвино, МОУ «Лицей»,
Разумовский Роман – Иваново, школа-лицей «Гармония», 8 кл.,
Торопов Евгений – Мурманск, МПЛ,
Калибин Борис – Иваново, школа-лицей «Гармония», 8 кл.,
Житницкий Дмитрий – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,

Кришеник Андрей – Черноголовка, школа 82,
Латушкин Сергей – Пермь, ФМШ 9, 8 кл.,
Куюмжиян Вергинэ – Ростов-на-Дону, гимназия 14, 8 кл.;

по 10 классам –

Кудинов Михаил – Колпашево, школа 7,
Швед Даниил – Челябинск, ФМЛ 31,
Бугаев Дмитрий – Омск, лицей 64,
Кушнир Сергей – Саров, гимназия 15,
Онскуль Илья – Омск, лицей 64,
Чернышев Егор – Нижний Новгород, лицей 165,
Лазеев Владимир – Тамбов, лицей 8,
Поршнев Евгений – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Петухов Алексей – Москва, лицей «Вторая школа»,
Антонова Татьяна – Тамбов, лицей 14,
Костин Михаил – Челябинск, ФМЛ 31,
Раскин Михаил – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа;

по 11 классам –

Вольфсон Георгий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Кобзев Владимир – Башкортостан, Межгорье, БКШ,
Хозин Михаил – Нижний Новгород, лицей 40,
Ватев Кирил – Долгопрудный, школа 5,
Гречников Евгений – Москва, школа 17,
Шкляев Александр – Пермь, ФМШ 146,
Пономарева Надежда – Екатеринбург, гимназия 9,
Смирнов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Стожков Владимир – Рыбинск, лицей 2,
Марков Виктор – Якутск, Республиканский колледж,
Коняев Андрей – Тамбов, лицей 14,
Шаталов Игорь – Краснодар, школа 87,
Ширяев Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 10 кл.,
Авдеев Роман – Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Данилов Александр – Ижевск, ЭМЛИ 29,
Левин Михаил – Ростов-на-Дону, гимназия 36,
Поярков Александр – Рыбинск, лицей 2,
Каленков Максим – Набережные Челны, гимназия 26,
Малинов Сергей – Йошкар-Ола, Политехнический лицей.