

Электростатическое поле в веществе

В. МОЖАЕВ

ПРИ ПОМЕЩЕНИИ ДИЭЛЕКТРИКА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ поле происходит поляризация диэлектрика. В случае полярных диэлектриков силы, действующие со стороны электрического поля на заряды молекул, создают момент сил, который стремится развернуть молекулу (диполь) вдоль силовых линий поля. В неполярных диэлектриках под действием поля происходит деформация молекул: положительные и отрицательные заряды молекул смещаются в противоположные стороны, и молекулы превращаются в диполи.

В общем случае, при неоднородной поляризации диэлектрика внутри него и на его поверхности появляются связанные заряды. Напряженность электрического поля в любой точке пространства будет являться суперпозицией внешнего поля и поля, создаваемого связанными зарядами.

В образцах, имеющих форму тонкой пластины, шара или тонкого и длинного цилиндра, во внешнем однородном поле будет происходить однородная поляризация. В этом случае связанных объемных зарядов не будет, а возникают только поверхностные связанные заряды. Эти заряды создают электрическое поле, направленное в диэлектрике против внешнего поля, и результирующее поле в диэлектрике ослабляется. Степень ослабления поля зависит как от формы образца, так и от свойств диэлектрика.

Если мы возьмем заряженный плоский конденсатор и полностью заполним его диэлектрической средой (при сохранении зарядов на обкладках конденсатора), то в этом случае отношение напряженности электрического поля в конденсаторе без диэлектрика (в вакууме) к напряженности поля внутри диэлектрика (после заполнения им конденсатора) будет определяться только электрическими свойствами диэлектрика. Величина этого отношения называется диэлектрической проницаемостью и обозначается ϵ .

Теперь перейдем к разбору конкретных задач.

Задача 1. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора с квадратными обкладками со стороной a частично заполнены диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ (рис.1). На каждом конденсаторе находится заряд Q . Определите напряженность электрического поля в диэлектриках и поверхностную плотность связанных зарядов на диэлектриках.

Рассмотрим сначала конденсатор, изображенный на рисунке 1,а. Такой конденсатор эквивалентен двум последовательно соединенным конденсаторам, один из которых воздушный с расстоянием между пластинами $d - x$, а другой – заполненный диэлектриком с расстоянием между пластинами x . Емкость полностью заполненного диэлектриком конденсатора равна $C = \epsilon_0 \epsilon a^2 / x$. Поскольку конденсаторы со-

единены последовательно, то заряд на каждом из них равен Q . Тогда разность потенциалов на конденсаторе с диэлектри-

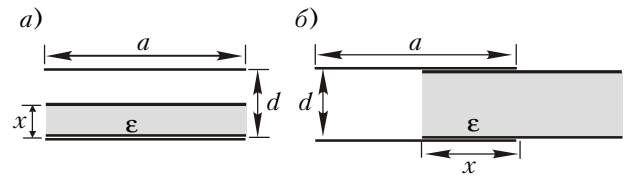


Рис. 1

ком равна $U = Q/C$, а напряженность поля в диэлектрике составляет

$$E_d = \frac{U}{x} = \frac{Qx}{\epsilon_0 \epsilon a^2 x} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon a^2}.$$

Мы получили, что напряженность поля в диэлектрике в ϵ раз меньше, чем при отсутствии диэлектрика.

Теперь найдем поверхностную плотность связанных зарядов на поверхностях диэлектрика. Электрическое поле в воздушном зазоре создается только свободными зарядами на обкладках конденсатора. (рис.2,а):

$$E_1 = \frac{Q}{\epsilon_0 a^2}.$$

Поле в диэлектрике является суперпозицией поля \vec{E}_1 и поля

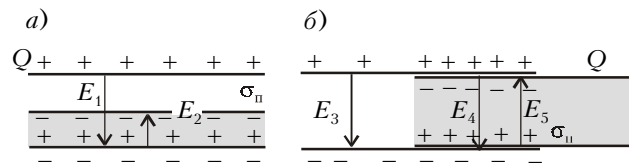


Рис. 2

\vec{E}_2 , создаваемого связанными зарядами. Обозначим через σ_n поверхностную плотность связанных зарядов. Тогда

$$E_2 = \frac{\sigma_n}{\epsilon_0}.$$

Напряженность поля в диэлектрике, с одной стороны, равна

$$E_d = E_1 - E_2 = \frac{Q}{\epsilon_0 a^2} - \frac{\sigma_n}{\epsilon_0},$$

а с другой стороны, мы раньше получили, что

$$E_d = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon a^2}.$$

Приравняем друг другу эти два выражения:

$$\frac{Q}{\epsilon_0 a^2} - \frac{\sigma_n}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon a^2},$$

откуда получим

$$\sigma_n = \frac{(\epsilon - 1)Q}{\epsilon a^2}.$$

Сделаем предельные переходы: при $\epsilon \rightarrow 1$ $\sigma_n \rightarrow 0$, а при $\epsilon \rightarrow \infty$ $\sigma_n \rightarrow \frac{Q}{a^2}$. Первый случай соответствует полному отсутствию диэлектрика (конденсатор пустой), второй – замене диэлектрика металлической пластиной.

Теперь рассмотрим конденсатор, изображенный на рисунке 1,б. Такой конденсатор эквивалентен двум параллельно соединенным конденсаторам: воздушному и полностью заполненному диэлектриком. Суммарная емкость такой систе-

мы равна

$$C = \frac{\epsilon_0 a(a-x)}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon a x}{d} = \frac{\epsilon_0 a(a-x+\epsilon x)}{d}.$$

Разность потенциалов между обкладками исходного конденсатора составляет

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Qd}{\epsilon_0 a(a-x+\epsilon x)}.$$

Напряженность поля в диэлектрике равна напряженности поля в воздушной части конденсатора (рис.2,б):

$$E_d = E_3 = \frac{U}{d} = \frac{Q}{\epsilon_0 a(a-x+\epsilon x)}.$$

Поскольку емкость конденсатора, полностью заполненного диэлектриком, составляет

$$C_d = \frac{\epsilon_0 \epsilon a x}{d},$$

то свободный заряд на этом конденсаторе равен

$$Q_C = C_d U = \frac{Q \epsilon x}{(a-x+\epsilon x)}.$$

Этими зарядами создается поле

$$E_4 = \frac{Q_C}{\epsilon_0 a x} = \frac{\epsilon Q}{\epsilon_0 a(a-x+\epsilon x)},$$

а напряженность поля E_5 определяется связанными зарядами:

$$E_5 = \frac{\sigma_{\text{п}}}{\epsilon_0},$$

где $\sigma_{\text{п}}$ – поверхностная плотность связанных зарядов. Используем тот факт, что $E_3 = E_4 - E_5$, и найдем $\sigma_{\text{п}}$:

$$\frac{Q}{\epsilon_0 a(a-x+\epsilon x)} = \frac{\epsilon Q}{\epsilon_0 a(a-x+\epsilon x)} - \frac{\sigma_{\text{п}}}{\epsilon_0},$$

откуда

$$\sigma_{\text{п}} = \frac{(\epsilon-1)Q}{a(a-x+\epsilon x)}.$$

Проведем проверку полученного результата: при $\epsilon \rightarrow 1$ $\sigma_{\text{п}} \rightarrow 0$ (случай пустого конденсатора), при $\epsilon \rightarrow \infty$ $\sigma_{\text{п}} \rightarrow Q/(ax)$ (вместо диэлектрика – проводящая пластина). Действительно, во втором случае весь заряд обкладок соберется на площади $S = ax$. Дело в том, что напряженность поля внутри проводника равна нулю, а из этого следует, что напряженность поля в воздушном зазоре также равна нулю. Отсутствие поля в воздушном пространстве конденсатора означает, что поверхностная плотность зарядов на обкладках длиной $a-x$ равна нулю, а весь заряд собрался на обкладках длиной x .

Задача 2. Диэлектрическая пластина толщиной l_2 с диэлектрической проницаемостью ϵ введена в плоский воздушный конденсатор (рис.3). Между поверхностями пластины и обкладками конденсатора остались воздушные зазоры, суммарная толщина которых равна l_1 . Определите силу притяжения между обкладками конденсатора, если разность потенциалов между ними U , а площадь пластин S .

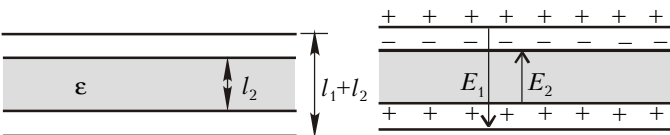


Рис. 3

Рис. 4

Пространство между пластинами нашего конденсатора разбивается на две области (рис.4): воздушный зазор, в котором электрическое поле E создается свободными зарядами обкладок, и слой диэлектрика, в котором электрическое поле создается и свободными и связанными зарядами и равно $E_d = E_1 - E_2$. Эта система эквивалентна двум последовательно соединенным конденсаторам: один из них воздушный с расстоянием между пластинами l_1 , а второй – заполненный диэлектриком толщиной l_2 . Емкость первого конденсатора равна $C_1 = \epsilon_0 S/l_1$, а второго – $C_2 = \epsilon_0 \epsilon S/l_2$. Общая емкость равна

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{\epsilon l_1 + l_2}.$$

Зная напряжение на конденсаторе, можно найти его заряд:

$$Q = CU = \frac{\epsilon_0 \epsilon S U}{\epsilon l_1 + l_2}$$

и напряженность электрического поля в воздушном зазоре:

$$E_1 = \frac{Q}{\epsilon_0 S} = \frac{\epsilon U}{\epsilon l_1 + l_2}.$$

Но это поле создается обеими пластинами, а поле одной пластины равно

$$\frac{E_1}{2} = \frac{\epsilon U}{2(\epsilon l_1 + l_2)}.$$

Тогда сила притяжения, действующая на каждую обкладку конденсатора, равна

$$F = \frac{E_1}{2} Q = \frac{\epsilon_0 \epsilon^2 S U^2}{2(\epsilon l_1 + l_2)^2}.$$

Задача 3. Плоский конденсатор, пластины которого имеют площадь S и расположены на расстоянии d , заполнен твердым диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ . Конденсатор подсоединен к батарее постоянного тока, ЭДС которой E . Одну из пластин конденсатора отодвигают так, что образуется воздушный зазор (рис.5). На какое расстояние x отодвинута пластина, если при этом произведена работа A ?

Емкость исходного конденсатора равна

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}.$$

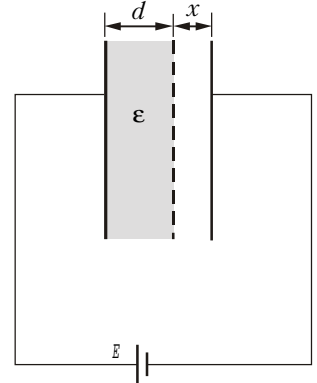


Рис. 5

Емкость конденсатора после перемещения правой обкладки на x будет равна емкости двух последовательно соединенных конденсаторов: конденсатора емкостью C_1 и воздушного конденсатора емкостью

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{x}.$$

Емкость системы двух конденсаторов составляет

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d + \epsilon x}.$$

Мы видим, что при перемещении обкладки емкость конденсатора уменьшается, а следовательно, уменьшается и заряд на обкладках конденсатора при постоянном напряжении на

них. Первоначальный заряд на конденсаторе был

$$Q_1 = C_1 E = \frac{\epsilon_0 \epsilon S E}{d},$$

а после перемещения стал

$$Q_2 = C E = \frac{\epsilon_0 \epsilon S E}{d + \epsilon x}.$$

Теперь найдем энергию, запасенную в конденсаторе в двух состояниях – исходном и конечном:

$$W_1 = \frac{C_1 E^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S E^2}{2d},$$

$$W_2 = \frac{C E^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S E^2}{2(d + \epsilon x)}.$$

Перемещая обкладку конденсатора, мы совершили работу A . По закону сохранения энергии эта работа пошла на изменение энергии конденсатора и на работу против ЭДС источника, поскольку при перемещении обкладки конденсатора его заряд уменьшается и ток течет против ЭДС:

$$A = (W_2 - W_1) + (Q_1 - Q_2) E =$$

$$= \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon S E^2}{2(d + \epsilon x)} - \frac{\epsilon_0 \epsilon S E^2}{2d} \right) + \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon S E^2}{d} - \frac{\epsilon_0 \epsilon S E^2}{d + \epsilon x} \right) = \frac{\epsilon_0 \epsilon^2 S E^2 x}{2d(d + \epsilon x)}.$$

Отсюда находим искомое перемещение пластины конденсатора:

$$x = \frac{d}{\epsilon \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon S E^2}{2Ad} - 1 \right)}.$$

Задача 4. В плоский конденсатор вдвигается с постоянной скоростью v пластина из диэлектрика (рис.6). Определите ток в цепи батареи, подключенной к конденсатору. Считать известными ЭДС батареи E , диэлектрическую проницаемость ϵ , высоту квадратных пластин конденсатора $S = b^2$.

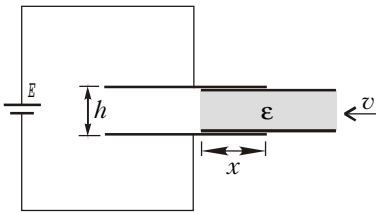


Рис. 6

Выберем в качестве переменной величины длину диэлектрика, находящегося в конденсаторе. Найдем емкость конденсатора в тот момент, когда пластина вошла в конденсатор на величину x . Такой конденсатор эквивалентен системе двух параллельно соединенных конденсаторов: воздушного емкостью

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S (b - x)}{bh}$$

и диэлектрического емкостью

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S x}{bh}.$$

Емкость нашей системы равна

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 S (b + (\epsilon - 1)x)}{bh}.$$

Заряд на конденсаторе в этот момент равен

$$Q = C E = \frac{\epsilon_0 S E (b + (\epsilon - 1)x)}{bh}.$$

Следовательно, в цепи батареи идет ток

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\epsilon_0 S E (\epsilon - 1)}{bh} \frac{dx}{dt} = \frac{\epsilon_0 S E (\epsilon - 1)}{bh} v = \frac{\epsilon_0 b E (\epsilon - 1) v}{h}.$$

Задача 5. В широкий сосуд с жидкостью частично погружается плоский конденсатор. Конденсатор подключен к батарее, которая поддерживает на обкладках конденсатора постоянную разность потенциалов U . Расстояние между пластинами d , плотность жидкости ρ , диэлектрическая проницаемость ϵ . На какую высоту поднимется жидкость в конденсаторе? Поверхностным натяжением пренебречь.

Обозначим высоту подъема жидкости через h , высоту пластин через L , а размер пластин в направлении, перпендикулярном рисунку 7, через a . Идея решения задачи заключается в следующем: запишем полную энергию нашей системы, которая является функцией от h , а затем исследуем ее на минимум по переменной h . Очевидно, что при некотором h энергия системы будет минимальна, а производная энергии по h будет равна нулю. Это и будет установившаяся высота подъема жидкости.

Сначала найдем емкость нашего конденсатора при подъеме жидкости на высоту h . Мы имеем систему двух параллельных конденсаторов, поэтому общая емкость равна их сумме:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon h a}{d} + \frac{\epsilon_0 (L - h) a}{d} = \frac{\epsilon_0 a}{d} (h(\epsilon - 1) + L).$$

Электрическая энергия, запасенная в конденсаторе, равна

$$W_1 = \frac{CU^2}{2}.$$

Потенциальная энергия поднятой жидкости при нулевом уровне, отсчитываемым от уровня жидкости в сосуде, составляет

$$W_2 = \frac{ad\rho gh^2}{2}.$$

Энергию, запасенную в батарее, можно записать в виде

$$W_3 = W_0 - QU = W_0 - CU^2,$$

где W_0 – полный запас энергии батареи, а CU^2 – это израсходованная энергия батареи, т.е. работа, которую совершила батарея, заряжая конденсатор до напряжения U . Полная энергия нашей системы равна

$$W = W_1 + W_2 + W_3 =$$

$$= \frac{CU^2}{2} + \frac{ad\rho gh^2}{2} + W_0 - CU^2 = \frac{ad\rho gh^2}{2} - \frac{CU^2}{2} + W_0.$$

Подставив сюда выражение для емкости, получим

$$W = \frac{ad\rho gh^2}{2} - \frac{\epsilon_0 a (h(\epsilon - 1) + L) U^2}{2d} + W_0.$$

Продифференцируем это выражение по h и приравняем к нулю:

$$\frac{dW}{dh} = ad\rho gh - \frac{\epsilon_0 a (\epsilon - 1) U^2}{2d} = 0.$$

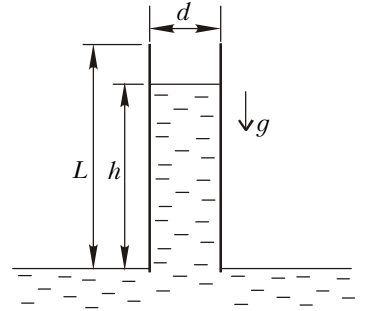


Рис. 7

Отсюда найдем высоту подъема жидкости:

$$h = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) \left(\frac{U}{d}\right)^2}{2\rho g}.$$

Упражнения

1. Внутри плоского конденсатора с площадью пластин $S = 200 \text{ см}^2$ и расстоянием между ними $d = 0,1 \text{ см}$ находится пластина из стекла ($\epsilon = 5$), целиком заполняющая пространство между пластинами конденсатора. Как изменится энергия конденсатора, если удалить стеклянную пластину? Решить задачу при двух условиях: 1) конденсатор все время подсоединен к батарее с напряжением $U = 300 \text{ В}$; 2) конденсатор был первоначально присоединен к той же батарее, затем отключен, и после этого пластина была удалена. Найдите также механическую работу, которая затрачивается на удаление пластины в том и другом случае.

2. Плоский воздушный конденсатор, пластины которого расположены горизонтально, наполовину залит жидким диэлектриком с проницаемостью ϵ . Какую часть конденсатора надо залить этим же диэлектриком при вертикальном расположении

пластин, чтобы емкости в обоих случаях были одинаковы?

3. В подключенный к батарее плоский конденсатор вставляются две пластины из сегнетоэлектрика ($\epsilon = 100$) таким образом, что между ними остается небольшой зазор (рис.8). При какой величине зазора h поле в нем будет в $n = 50$ раз больше, чем в отсутствие диэлектрика? Расстояние между обкладками $d = 2 \text{ см}$.

4. Плоский конденсатор с горизонтально расположенными пластинами подсоединен к батарее с ЭДС \mathcal{E} и помещен в сосуд, который постепенно заполняется керосином ($\epsilon = 2$). Найдите зависимость напряженности поля в центре конденсатора от толщины слоя керосина h внутри него. Расстояние между пластинами конденсатора равно d .

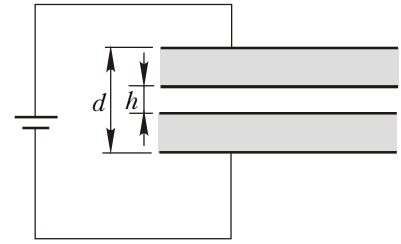


Рис. 8