Целочисленные треугольники

Э.БАЛАШ

В данной заметке целочисленными называются такие треугольники, длины сторон которых выражаются натуральными числами.

Хорошо изучены целочисленные прямоугольные треугольники. Длины их сторон a, b, c представляются так называемыми *пифагоровыми* тройками чисел (a, b, c):

$$a = l\left(m^2 - n^2\right);$$
$$b = 2lm;$$
$$c = l\left(m^2 + n^2\right).$$

Здесь l, m, n – произвольные натуральные числа такие, что $m > n$. Выражения для a и b можно переставлять местами.

Нас будут интересовать целочисленные треугольники с длинами сторон a, b, c, содержащие углы 60 или 120 градусов. Условимся всегда считать сторону c противолежащей углу, кратному 60°.

Целочисленные треугольники с углом 120°

Если треугольник имеет угол 120°, то его стороны a, b, c связаны равенством

$$a^2 + ab + b^2 = c^2. \qquad (1)$$

Это следует из *теоремы косинусов,* согласно которой для произвольного треугольника с длинами сторон a, b, c и углом α, противолежащим стороне c, выполняется равенство $a^2 - 2ab\cos\alpha + b^2 = c^2$.

Наоборот, если стороны треугольника a, b, c связаны соотношением (1), то сторона c лежит против угла 120°. Действительно, в этом случае косинус угла α, противолежащего стороне c, согласно (1) и теореме косинусов равняется $-\frac{1}{2}$, что возможно лишь в том случае, если $\alpha = 120^\circ$.

Равенство (1) позволяет «забыть» о геометрии: задачу поиска целочисленных треугольников с углом 120° мы свели к задаче решения уравнения (1) в натуральных числах. На поиске решений в натуральных числах уравнения (1) мы сейчас и сосредоточим свои усилия.

Прежде всего заметим, что если какая-то тройка натуральных чисел (a, b, c) удовлетворяет уравнению (1), причем у чисел a и b имеется общий делитель d, то на d будет делиться также и число c. Это наблюдение позволяет ограничиться поиском лишь таких решений (a, b, c), у которых числа a и b взаимно просты. Все другие решения будут отличаться от найденных натуральным множителем. В дальнейшем мы будем предполагать числа a и b взаимно простыми, не оговаривая это особо.

Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Пусть натуральные числа a, b, c связаны соотношением (1), тогда c не делится на 3, а из двух чисел $c + a - b$ и $c + b - a$ одно делится на 3, а другое не делится.

Действительно, из равенства (1) следует, что $c^2 - \left(a^2 - b^2\right) = 3ab$. Если c делится на 3, то $a - b$ делится на 3. Но квадраты чисел, делящихся на 3, делятся на 9. Левая часть выписанного равенства делится на 9, значит, и $3ab$ тоже делится на 9. Тогда ab делится на 3, т.е. одно из чисел a или b делится на 3. Но тогда и другое из этих чисел делится на 3, поскольку $a - b$ делится на 3. А это невозможно, поскольку числа a и b взаимно просты. Полученное противоречие говорит о том, что исходное допущение неверно. Итак, число c не делится на 3. Далее, из равенства $(c + a - b)(c + b - a) = 3ab$ следует, что одно из чисел $c + a - b$ или $c + b - a$ делится на 3. Оба они не могут делиться на 3, поскольку в противном случае их сумма делилась бы на 3, что невозможно.

Теорема. *Пусть числа a, b, c связаны соотношением (1). Тогда найдутся натуральные взаимно простые числа n и m (n > m) такие, что n − m не делится на 3 и*

$$a = n^2 - m^2, \quad b = m^2 + 2mn, \quad c = m^2 + mn + n^2 \quad (2).$$

Доказательство. Будем полагать, что $c + a - b$ не делится на 3. Этого всегда можно добиться выбором обозначений, поскольку в выражение $a^2 + ab + b^2$ переменные a и b входят симметрично. Введем вспомогательный параметр $k = \frac{b}{c+a}$. Так как a, b и c – целые числа, то k – рациональное число. Пусть $k = \frac{m}{n}$, где дробь $\frac{m}{n}$ будем предполагать несократимой. Так как $ab + b^2 = c^2 - a^2$, то $b(a+b) = (c-a)(c+a)$. Заменим везде b на $k(c+a)$: $k(c+a)(a + kc + ka) = (c-a)(c+a)$.

Так как $c + a \neq 0$, то на $c + a$ можно сократить: $ka + k^2c + k^2a = c - a$, откуда $\left(k^2 + k + 1\right)a = \left(1 - k^2\right)c$ и $\frac{a}{c} = \frac{1-k^2}{k^2+k+1}$. Прибавим к обеим частям последнего равенства по единице: $\frac{a+c}{c} = \frac{k+2}{k^2+k+1}$. Теперь умножим обе части последнего равенства на k: $\frac{k(a+c)}{c} = \frac{k^2+2k}{k^2+k+1}$. Но $k(a+c) = b$, поэтому $\frac{b}{c} = \frac{k^2+2k}{k^2+k+1}$.

Заменим везде k на $\frac{m}{n}$. После упрощений получим

$$\frac{a}{c} = \frac{n^2 - m^2}{m^2 + mn + n^2}, \quad \frac{b}{c} = \frac{m^2 + 2nm}{m^2 + mn + n^2},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{n^2 - m^2}{m^2 + 2mn}.$$

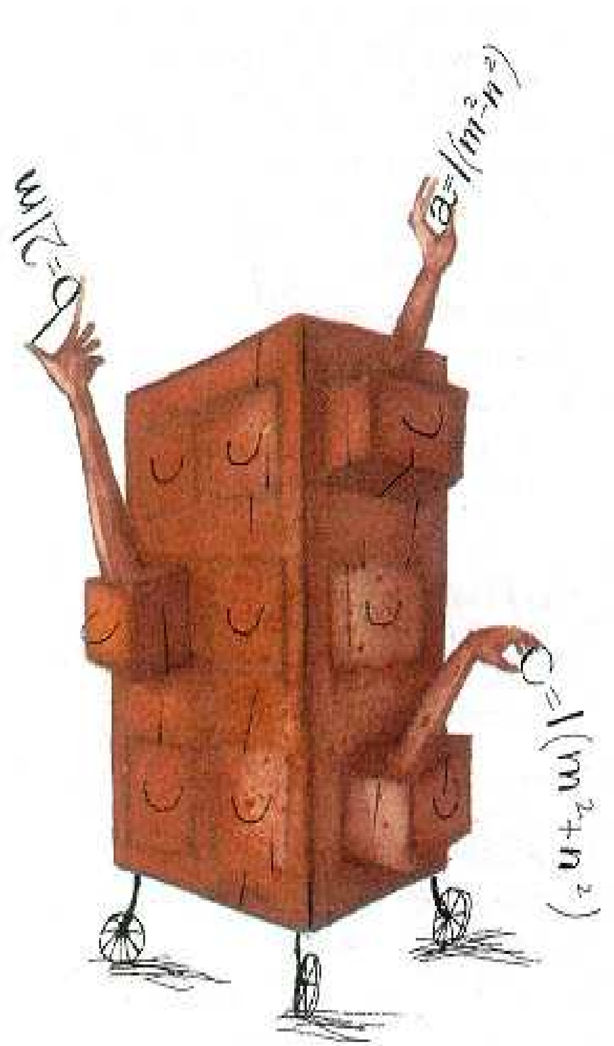
Докажем, что дробь $\dfrac{n^2-m^2}{m^2+2mn}$ несократима.

Предположим, что оба числа n^2-m^2 и $m(m+2n)$ делятся на некоторое простое число p. Рассмотрим множители второго числа. Если m делится на p, то n на p не делится в силу взаимной простоты чисел m и n. Но тогда n^2-m^2 на p не делится, чего не может быть. Следовательно, на p делится число $m+2n$, а число m не делится. В этом случае на p будет делиться

$$4\left(n(m+2n)-\left(n^2-m^2\right)\right)-(m+2n)^2=3m^2.$$

Так как m^2 не делится на p, то на p делится 3. Итак, число p может быть только тройкой: $p=3$.

В самом начале доказательства мы предположили, что $c+a-b$ не делится на 3. Поскольку $\dfrac{m}{n}=\dfrac{b}{c+a}$, то $\dfrac{m}{n-m}=\dfrac{b}{c+a-b}$; отсюда заключаем, что $n-m$ не делится на 3. Но по нашему предположению $n^2-m^2=(n-m)(n+m)$ делится на 3, поэтому на 3 делится число $n+m$, а значит, и число $m(n+m)=mn+m^2=\left(m^2+2mn\right)-mn$. Поскольку по предположению число m^2+2mn делится на 3, отсюда следует, что mn делится на 3, т.е. n делится на 3. Из делимости на 3 разности n^2-m^2 следует, что и m должно делиться на 3, что невозможно. Итак, дробь $\dfrac{n^2-m^2}{m^2+2mn}=\dfrac{a}{b}$ несократима. В силу взаимной простоты чисел a и b отсюда заключаем, что $a=n^2-m^2$, $b=m^2+2mn$ и, следовательно, $c=m^2+mn+n^2$. Теорема доказана.



Заметим, что соотношения (2) были известны уже Диофанту (ок. 250 г.).

Упражнение 1. Докажите, что для любых натуральных m и n $(n>m)$ числа a, b, c, рассчитанные по формулам (2), удовлетворяют равенству (1).

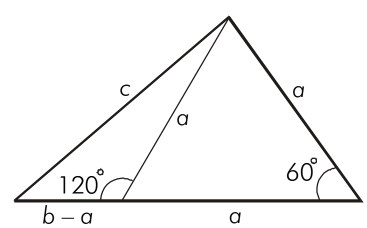
Целочисленные треугольники с углом 60°

Длины сторон a, b, c треугольников с углом 60° удовлетворяют уравнению

$$a^2-ab+b^2=c^2, \qquad (3)$$

получающегося из тех же соображений, что и уравнение (1). Здесь также можно искать натуральные решения уравнения (3), развивая соответствующую теорию. Однако мы поступим более хитрым образом. На сей раз алгебре будет помогать геометрия. Оказывается, всякий треугольник с углом 60° родственен некоторому треугольнику с углом 120°! Вот как устанавливаются эти «родственные узы».

Вначале заметим, что если к углу 60° в треугольнике примыкают две равные стороны $a=b$, то в соответствии с (3) получаем $a=b=c$. Итак, уравнение (3) допускает тривиальное решение $a=b=c=n$, где n – любое натуральное число. Пусть теперь к углу 60° в треугольнике примыкают две различающиеся по длине стороны. Без ограничения общности будем полагать $b>a$. Выделив внутри данного треугольника правильный треугольник с длиной стороны a, получим дополнительный к нему треугольник с длинами сторон a, $b-a$, c и углом 120° (см. рисунок).



Про этот дополнительный треугольник («родственный» исходному) мы уже все знаем. Осталось только применить разработанную выше теорию к дополнительному треугольнику с углом 120°, а затем распространить результат на исходный треугольник.

Упражнение 2. Докажите, что если a, b, c – длины сторон целочисленного треугольника с углом 60°, причем $b>a$, то найдутся такие натуральные m и n, что

$$a=n^2-m^2,\; b=n^2+2mn,\; c=m^2+mn+n^2.$$

При этом $n-m$ не делится на 3.