

Точка на окружности

**В.АЛЕКСЕЕВ, В.ГАЛКИН,
В.ПАНФЕРОВ, В.ТАРАСОВ**

ЗАДАЧИ О ТОЧКАХ, ЛЕЖАЩИХ НА ОКРУЖНОСТИ, О хордах и касательных, проходящих через эти точки, часто встречаются в вариантах вступительных экзаменов. С методами решения таких задач мы и собираемся познакомить читателей.

Напомним основные теоремы, которыми нам в дальнейшем придется часто пользоваться. Это прежде всего теоремы о вписанных углах, углах между хордами и касательными, углах с вершиной внутри и вне круга и, разумеется, теорема синусов. Причем теорему синусов часто бывает удобно применять в следующей формулировке: *если из точки А окружности радиуса R хорда BC длины a видна под углом α , то $a = 2R \sin \alpha$* (рис.1).

Мы рекомендуем читателям вспомнить формулировки и доказательства упомянутых теорем. Ведь очень часто доказательство той или иной теоремы содержит в себе методы решения близких по формулировке задач.

В дальнейшем мы будем придерживаться стандартных обозначений сторон, углов и других элементов треугольника, т.е. полагать, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Радиус окружности, проходящей через три заданные точки K, L, M, будем обозначать как R_{KLM} .

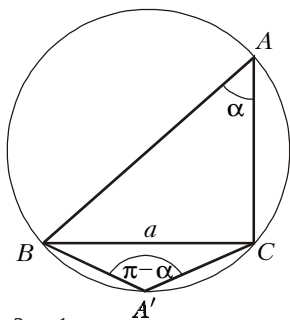


Рис. 1

Итак, приступим к решению задач.

Задача 1. В треугольнике ABC даны сторона $BC = a$ и $\angle A = \alpha$. Пусть I – центр вписанной окружности, H – ортоцентр (точка пересечения высот), B_1 и C_1 – основания высот, проведенных из вершин B и C. Найдите R_{ABC} , $R_{B_1C_1}$, R_{BHC} , а также отрезки B_1C_1 и AH.

Решение. По теореме синусов находим радиус описанной около треугольника ABC окружности:

$$R = R_{ABC} = \frac{a}{2 \sin \alpha}.$$

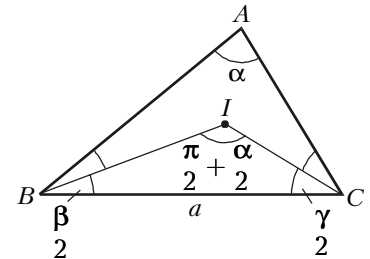


Рис. 2

Так как I – точка пересечения биссектрис (рис.2),

$$\angle BIC = \pi - \frac{\beta + \gamma}{2} = \pi - \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

(Заметим попутно, что $\angle BIC$ всегда тупой и выражается только через угол α .) По теореме синусов,

$$R_{B_1C_1} = \frac{a}{2 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Угол BHC также выражается через α , а именно, $\angle BHC = \pi - \alpha$. Кстати, здесь необходимо рассмотреть два возможных случая: $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис.3,а) и $\alpha > \frac{\pi}{2}$ (рис.3,б). Проследите это самостоятельно. Снова по теореме синусов

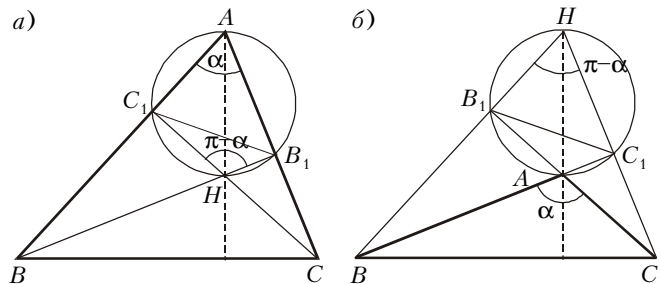


Рис. 3

получаем

$$R_{BHC} = \frac{BC}{2 \sin(\pi - \alpha)} = \frac{a}{2 \sin \alpha} = R.$$

Для отыскания AH заметим, что точки A, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности с диаметром AH (см. рис.3). По теореме синусов, $C_1B_1 = AH \sin \alpha$. Найдем отрезок B_1C_1 . Для этого заметим, что треугольник B_1AC_1 подобен треугольнику ABC , ибо из прямоугольных треугольников BB_1A и CC_1A получаем

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = \cos \alpha$$

(или $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ при $\alpha > \frac{\pi}{2}$). Поэтому треугольники B_1AC_1 и ABC подобны с коэффициентом $|\cos \alpha|$. Но тогда

$$B_1C_1 = a |\cos \alpha|$$

и

$$AH = a |\operatorname{ctg} \alpha|.$$

Упражнения

1. Из точек A и A_1 , лежащих по одну сторону от прямой BC , отрезок BC виден под одним и тем же углом $\alpha \neq 0$. Докажите, что около четырехугольника BA_1A_1C можно описать окружность.
2. Из точек A и A' , лежащих по разные стороны от прямой BC , отрезок BC виден под углами α и $180^\circ - \alpha$ соответственно. Докажите, что около четырехугольника $BACA'$ можно описать окружность.
3. Докажите, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180° .
4. Докажите, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда $AB + CD = AD + BC$.
5. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AB_1C_1 (см. задачу 1).

Задача 2 (МГУ, мехмат, 1972). В треугольнике KLM угол L тупой, а длина стороны KM равна 6. Найдите радиус описанной около треугольника KLM окружности, если известно, что на этой окружности лежит центр окружности высот, проходящий через вершины K, M и точку пересечения высот треугольника KLM .

Решение. Обозначим через H ортоцентр треугольника KLM , через O – центр окружности, проходящей через точки K, M, H (рис.4). По условию угол L тупой. Поэтому точка H лежит вне $\triangle KLM$, точка L является точкой пересечения

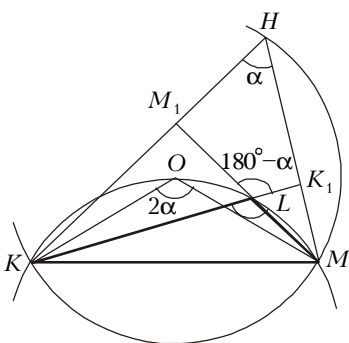


Рис. 4

высот в $\triangle KHM$ и лежит внутри $\triangle KHM$, а треугольник KHM – остроугольный (его углы при вершинах K, H, M являются острыми углами прямоугольных треугольников MKM_1, MHM_1, KMK_1 соответственно). Пусть $\angle KHM = \alpha$. Тогда центральный угол KOM равен 2α . Из точек O и L окружности KLM хорда KM видна под одним и тем же углом: $\angle KLM = \angle KOM = 2\alpha$. Но $\angle KLM = \angle K_1LM_1 = 180^\circ - \alpha$, так как в четырехугольнике LK_1HM_1 углы при вершинах K_1 и M_1 прямые. Поэтому $2\alpha = 180^\circ - \alpha$, т.е. $\alpha = 60^\circ$, $\angle KLM =$

$= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, и по теореме синусов искомый радиус равен

$$R_{KLM} = \frac{KM}{2 \sin \angle KLM} = \frac{6}{2 \sin 120^\circ} = 2\sqrt{3}.$$

Упражнение 6. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , равен 1. Известно, что на этой окружности лежит центр окружности, проходящей через вершины A, C и точку пересечения высот треугольника ABC . Найдите длину стороны AC .

Задача 3 (МГУ, биофак, 1990). Из точки M на окружности проведены три хорды: $MN = 1, MP = 6, MQ = 2$. При этом углы $\angle NMP$ и $\angle PMQ$ равны. Найдите радиус окружности.

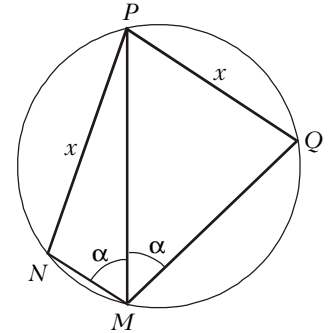


Рис. 5

Решение. Пусть R – искомый радиус, $\angle NMP = \angle QMP = \alpha$, $NP = x$ (рис. 5). Тогда $PQ = 2R \sin \alpha = x$ (в окружности против равных вписанных углов лежат равные хорды). Теорема косинусов для $\triangle MPN$ и $\triangle MPQ$ дает систему относительно x и $\cos \alpha$:

$$\begin{cases} x^2 = 1^2 + 6^2 - 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot \cos \alpha, \\ x^2 = 2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \cos \alpha, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x = \sqrt{34}, \\ \cos \alpha = \frac{1}{4}, \end{cases}$$

а

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Значит,

$$R = \frac{x}{2 \sin \alpha} = 2\sqrt{\frac{34}{15}}.$$

Упражнение 7. Через вершину угла A проведена окружность, пересекающая стороны угла в точках M и N . Биссектриса этого угла пересекает окружность в точке P . Найдите радиус окружности, если $AM = 1, AN = 2, AP = 4$.

Задача 4 (МГУ, физфак, 1971). Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от вершины E до прямых AB, BC и CD равны a, b и c соответственно. Найдите расстояние от вершины E до диагонали AD .

Решение. Докажем следующее свойство точки E окружности (рис.6):

Если $A_1E = a, B_1E = b, C_1E = c, D_1E = x$ – соответственно, расстояния от точки E окружности до прямых AB, BC, CD, AD , образующих вписанный четырехугольник $ABCD$, то

$$ac = bx.$$

Доказательство вытекает из наличия двух пар подобных

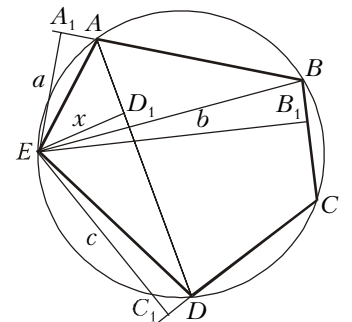


Рис. 6

прямоугольных треугольников, имеющих общие гипотенузы, а значит, и одинаковые коэффициенты подобия. Действительно, вписанные углы $\angle ABE$ и $\angle ADE$ опираются на дугу AE и потому равны, значит, треугольники BA_1E и DD_1E подобны с коэффициентом $k = \frac{BE}{DE} = \frac{a}{x}$.

Далее, углы $\angle B_1BE$ и $\angle C_1DE$ равны, так как дополняют один и тот же угол $\angle CDE$ до 180° (по свойству вписанного четырехугольника $ABCD$), значит, треугольники BB_1E и DC_1E тоже подобны с тем же коэффициентом $k = \frac{BE}{DE} = \frac{b}{c}$.

Окончательно имеем

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{c} \Rightarrow ac = bx.$$

Искомое расстояние равно $x = \frac{ac}{b}$.

Упражнение 8 (МГУ, физфак, 1971). В окружность вписана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). На дуге CD , не содержащей вершин A и B , взята точка S . Точки P , Q , M и N являются основаниями перпендикуляров, опущенных из S на прямые CD , AB , AD и BC соответственно. Известно, что $SM = a$, $SN = b$, $SP = c$. Найдите отношение площадей треугольников MQS и MPS .

Задача 5 (МГУ, геогр. ф-т, 1989). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD . Известно, что $AD = 2$, $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$ и расстояние между точкой пересечения биссектрис треугольника ABD и точкой пересечения биссектрис треугольника ACD равно $\sqrt{2}$. Найдите длину стороны BC .

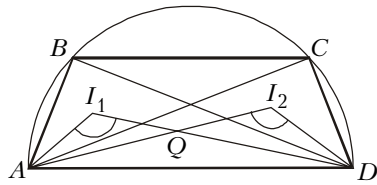


Рис. 7

Решение. Из точек B и C отрезок AD виден под одним и тем же (прямым) углом. Значит, четырехугольник $ABCD$ является вписанным в окружность с диаметром $AD = 2$ (рис.7), причем

$$BC = 2R \sin \angle BAC, \text{ где } R = \frac{1}{2} AD = 1.$$

Задача, следовательно, сводится к отысканию угла $\angle BAC$.

Если из точки B окружности отрезок AD виден под углом φ , то из центра I_1 вписанной в $\triangle ABD$ окружности отрезок AD виден под углом $\frac{\pi + \varphi}{2}$ (см. задачу 1). Так как $\angle ABD = \angle ACD = \frac{\pi}{2}$, I_1 и I_2 – центры вписанных в $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ окружностей, то

$$\angle AI_1D = \angle AI_2D = \frac{1}{2} \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Значит, четырехугольник AI_1I_2D тоже является вписанным в окружность. Ее радиус

$$R_1 = \frac{AD}{2 \sin \angle AI_1D} = \frac{2}{2 \sin \frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

Так как $I_1I_2 = 2R_1 \sin \angle I_1AI_2$, то

$$\sin \angle I_1AI_2 = \frac{I_1I_2}{2R_1} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично,

$$\sin \angle I_1DI_2 = \frac{1}{2}.$$

Вписанные углы $\angle I_1AI_2$ и $\angle I_1DI_2$ – острые, так как каждый из

подобных треугольников I_1QA и I_2QD (где $Q = AI_2 \cap DI_1$) уже имеет тупой угол. Значит,

$$\angle I_1AI_2 = \angle I_1DI_2 = \frac{\pi}{6}.$$

Докажем, что $\angle BAC = 2\angle I_1AI_2 = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Действительно, угол $\angle BAC$ есть разность двух углов $\angle BAD$ и $\angle CAD$ ($\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD$), а угол $\angle I_1AI_2$ образован биссектрисами последних. Но тогда

$$\angle I_1AI_2 = \angle I_1AD - \angle I_2AD = \frac{1}{2} \angle BAD - \frac{1}{2} \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC,$$

откуда

$$\angle BAC = \frac{\pi}{3}, \text{ а } BC = \sqrt{3}.$$

Упражнения

9. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC , $AD = 7$, $BC = 3$, $\angle ACD = 60^\circ$. Известно, что точки A , B , C , D лежат на одной окружности и перпендикуляр, проведенный из точки A к стороне CD , делит угол $\angle BAD$ пополам. Найдите длину диагонали AC .

10. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ проведены диагонали KM и LN . Известно, что $\angle KLM = \angle KMN = 60^\circ$, $LM = \sqrt{3}$ и расстояние между точкой пересечения биссектрис треугольника KLN и точкой пересечения биссектрис треугольника KMN равно 1. Найдите длину стороны KN .

11 (МГУ, геогр. ф-т, 1986). Внутри треугольника ABC взята точка K . Известно, что длина стороны BC равна 1, длина стороны AB равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а величины углов $\angle ABC$, $\angle KCB$ и $\angle BCK$ равны 30° , 120° и 120° соответственно. Найдите длину отрезка BK .

Задача 6 (МГУ, геогр. ф-т, 1986). В выпуклом четырехугольнике $ABKC$ длина стороны AB равна $\sqrt{3}$, длина диагонали BC равна 1, а величины углов $\angle ABC$, $\angle BKA$ и $\angle BKC$ равны 120° , 30° и 60° соответственно. Найдите длину стороны BK .

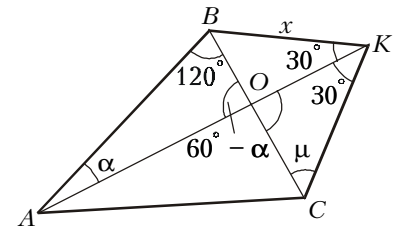


Рис. 8

Решение. Отрезок BK виден из точек A и C под углами $\angle BAK = \alpha$ и $\angle BCK = \mu$ соответственно (рис.8). Из треугольников $\triangle AOB$ и $\triangle COC$ получаем

$$\begin{aligned} \angle AOB = \angle COK &= 180^\circ - \angle ABO - \angle BAK = \\ &= 180^\circ - 120^\circ - \alpha = 60^\circ - \alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu &= 180^\circ - \angle COK - \angle OKC = \\ &= 180^\circ - (60^\circ - \alpha) - (60^\circ - 30^\circ) = 90^\circ + \alpha. \end{aligned}$$

Найдем радиусы описанных около $\triangle ABK$ и $\triangle CBK$ окружностей:

$$R_{ABK} = \frac{AB}{2 \sin \angle AKB} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin 30^\circ} = \sqrt{3},$$

$$R_{BCK} = \frac{BC}{2 \sin \angle BKC} = \frac{1}{2 \sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

и выразим через них искомую длину $BK = x$:

$$\begin{cases} x = 2R_{ABK} \sin \alpha \\ x = 2R_{BCK} \sin \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{3} \sin \alpha \\ x = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \alpha, \end{cases}$$

откуда $\operatorname{ctg} \alpha = 3$, и

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Значит,

$$x = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Задача 7. Биссектриса DE треугольника ADC продлена до пересечения с описанной окружностью в точке B . а) Известно, что $BD = l$ и $\angle ADC = \beta$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$. б) Известны длины отрезков $DE = m$ и $BE = n$, на которые отрезок BD отсекается другой диагональю AC . Найдите длины отрезков AB и BC .

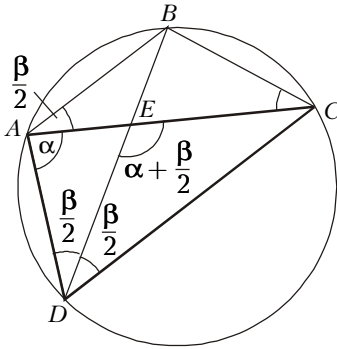


Рис. 9

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} BD \cdot AC \cdot \sin \angle DEC = \\ &= \frac{1}{2} BD \cdot 2R \sin \angle ADC \cdot \sin \angle DEC. \end{aligned}$$

Из $\triangle ADE$ и $\triangle ABE$ ясно, что

$$\angle DEC = \alpha + \frac{\beta}{2} = \angle DAB, \text{ где } \alpha = \angle DAE,$$

$$\frac{\beta}{2} = \angle ADE = \angle CDE = \angle BAE = \frac{1}{2} \overset{\cup}{\angle} BC.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} BD (2R \sin \angle DEC) \sin \angle ADC = \\ &= \frac{1}{2} BD (2R \sin \angle DAB) \sin \angle ADC = \\ &= \frac{1}{2} BD \cdot BD \cdot \sin \angle ADC = \frac{1}{2} l^2 \sin \beta. \end{aligned}$$

б) Ответ вытекает из подобия $\triangle ABE$ и $\triangle DBA$ (по двум углам):

$$\begin{aligned} \frac{AB}{BD} &= \frac{BE}{AB} \Rightarrow AB^2 = \\ &= BD \cdot BE \Rightarrow AB = \\ &= BC = \sqrt{(m+n)n}. \end{aligned}$$

Задача 8 (МГУ, мехмат, 1997). Диагональ вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E , причем $\angle ADB = \frac{\pi}{8}$, $BD = 6$ и

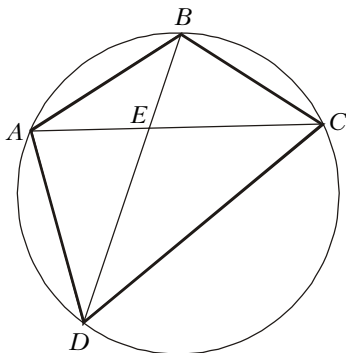


Рис. 10

$AD \cdot CE = DC \cdot AE$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

Решение. Конфигурация этой задачи (рис.10) напоминает предыдущую. Из условия имеем

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{CE}.$$

В треугольнике ADC отрезок DE отсекает противоположную сторону AC на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Значит, DE – биссектриса в $\triangle ADC$. Докажем это.

Пусть биссектриса DE_1 не совпадает с DE . Тогда по свойству биссектрисы

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE_1}{CE_1}, \text{ или } \frac{AE_1}{CE_1} = \frac{AE}{CE},$$

но это значит, что точки E_1 и E совпадают.

Итак, BD – биссектриса. Осталось воспользоваться результатом предыдущей задачи. Так как по условию $BD = l = 6$, $\angle ADC = 2\angle ADB = 2 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, то искомая площадь равна

$$S = \frac{1}{2} BD^2 \sin \angle ADC = \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 9\sqrt{2}.$$

Задача 9 (МГУ, мехмат, 1997). В окружности проведены хорды AC и BD , пересекающиеся в точке E , причем касательная к окружности, проходящая через точку C , параллельна BD . Известно, что $AB : BE = 3 : 1$ и $S_{\triangle ADC} = 18$. Найдите площадь треугольника CDE .

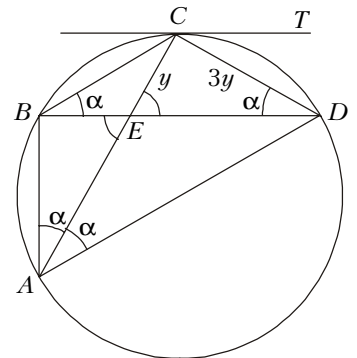


Рис. 11

Решение. Задача сводится к нахождению отношения $CE : AC$. Действительно, высота h_D , проведенная из вершины D , является общей для треугольников CDE и ADC (рис.11). Поэтому

$$\frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} CE \cdot h_D}{\frac{1}{2} AC \cdot h_D} = \frac{CE}{AC}.$$

Касательная CT параллельна BD . Поэтому $\overset{\cup}{\angle} BC = \overset{\cup}{\angle} DC$, $\overset{\cup}{\angle} BC = \overset{\cup}{\angle} DC$. Обозначим $\overset{\cup}{\angle} CBD = \overset{\cup}{\angle} CDB = \alpha$. По теореме о вписанном угле,

$$\overset{\cup}{\angle} BAC = \frac{1}{2} \overset{\cup}{\angle} BC = \overset{\cup}{\angle} BDC = \alpha,$$

$$\overset{\cup}{\angle} DAC = \frac{1}{2} \overset{\cup}{\angle} CD = \overset{\cup}{\angle} CBD = \alpha,$$

т.е. хорда AC является биссектрисой угла BAD .

Имеем стандартную конфигурацию: биссектриса AE в $\triangle ABD$ продолжена до пересечения с описанной (около $\triangle ABD$) окружностью, т.е. во вписанном четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла. Рассмотрим две пары подобных треугольников. Во-первых, $\triangle BAE \sim \triangle CDE$ по двум углам: $\angle BAE = \angle CDE = \alpha$, $\angle BEA = \angle DEC$. Поэтому $BE : BA = CE : CD = 1 : 3$. Пусть $CE = y$, тогда $CD = 3y$. Кроме того, $\triangle CDE \sim \triangle CAD$ по двум углам: $\angle CDE = \angle CAD = \alpha$, а угол при вершине C – общий.

Поэтому

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow AC = \frac{CD^2}{CE} = \frac{(3y)^2}{y} = 9y.$$

Значит,

$$\frac{CE}{AC} = \frac{y}{9y} = \frac{1}{9},$$

и искомая площадь равна

$$S_{\Delta CDE} = \frac{CE}{AC} \cdot S_{\Delta ADC} = \frac{1}{9} \cdot 18 = 2.$$

Упражнение 12. В окружности проведены хорды AC и BD , пересекающиеся в точке E , причем касательная к окружности, проходящая через точку A , параллельна BD . Известно, что $CD : ED = 3 : 2$, $S_{\Delta ABE} = 8$. Найдите площадь треугольника ABC .

Задача 10. Биссектриса AA_1 треугольника ABC продолжена до пересечения в точке A_2 с описанной окружностью (рис.12). а) Докажите, что

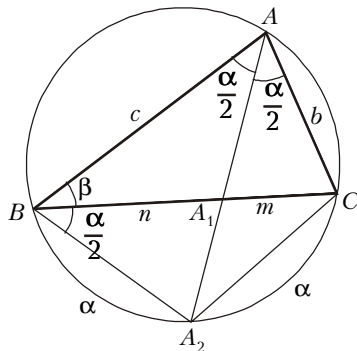


Рис. 12

Докажите, что $l_a^2 = bc - mn$, где l_a – биссектриса угла A , $AC = b$, $AB = c$, $A_1C = m$, $A_1B = n$.

$$\begin{aligned} \angle AA_1C &= \angle ABA_2, \\ \angle AA_1B &= \angle CA_2A. \end{aligned}$$

б) Докажите, что $l_a^2 = bc - mn$, где l_a – биссектриса угла A , $AC = b$, $AB = c$, $A_1C = m$, $A_1B = n$.

Решение. а) В точке A_1 пересекаются хорды AA_2 и BC . С учетом теоремы о вписанном угле имеем две пары подобных треугольников (по двум углам) – это треугольники AA_1B и CA_1A_2 , а также AA_1C и BA_1A_2 . Каждое из указанных подобий дает известное свойство отрезков хорд: $AA_1 \cdot A_1A_2 = BA_1 \cdot A_1C$, откуда

$$l_a x = mn, \quad (*)$$

где $x = A_1A_2$. Поскольку

$$\angle BAA_2 = \angle CAA_2 = \angle CBA_2 = \angle BCA_2 = \frac{\alpha}{2},$$

где $\alpha = \angle BAC$, получаем, что

$$\Delta AA_2B \sim \Delta ACA_1 \sim \Delta BA_2A_1,$$

а также

$$\Delta AA_2C \sim \Delta ABA_1 \sim \Delta CA_2A_1.$$

Из доказанных подобий следует, что, например,

$$\angle AA_1C = \angle ABA_2.$$

Иначе равенство этих же углов можно доказать непосредственно вычислением:

$$\angle AA_1C = \frac{\alpha}{2} + \beta \text{ – как внешний угол для } \Delta ABA_1,$$

$$\angle ABA_2 = \frac{\alpha}{2} + \beta \text{ – как угол в } \Delta ABA_2.$$

Значит,

$$\angle AA_1C = \angle ABA_2.$$

Аналогичными способами можно доказать равенство

$$\angle AA_1B = \angle CA_2A.$$

б) Из подобия ΔAA_2B и ΔACA_1 имеем

$$\frac{AA_2}{AC} = \frac{AB}{AA_1} \Leftrightarrow \frac{l_a + x}{b} = \frac{c}{l_a} \Rightarrow l_a^2 + l_a x = bc,$$

откуда, с учетом (*), находим

$$l_a^2 = bc - mn.$$

Мы получили важную формулу, позволяющую в некоторых случаях вычислять биссектрису угла треугольника.

Задача 11. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E , $AB = AD$, CA – биссектриса угла C , $\angle BAD = 140^\circ$, $\angle BEA = 110^\circ$. Найдите угол CDB .

Решение. Мы уже встречались со стандартным построением – продолжением биссектрисы треугольника до пересечения с описанной окружностью. В полученном при этом вписанном четырехугольнике (например, четырехугольнике $BCDA$) оказываются равными две вновь полученные стороны ($BA = DA$, так как по теореме о вписанном угле $\angle DBA = \angle BDA = \frac{1}{2} \angle BCD$).

В данной задаче ситуация обратная. Известно (рис.13), что отрезок CE – биссектриса угла C в ΔBCD ; биссектриса CE продолжена так, что в четырехугольнике $BCDA$ равны стороны BA и DA (по условию). Докажем, что четырехугольник $BCDA$ является вписанным. Достаточно убедиться, что описанная около ΔBCD окружность пройдет через точку A . Действительно, так как $BA = AD$, то $\angle DBA = \angle BDA$. Поэтому середина дуги BmD , как и точка A , лежит на биссектрисе угла B и на серединном перпендикуляре к хорде BD . Значит, точка A совпадает с серединой дуги BmD , и четырехугольник $BCDA$ является вписанным.

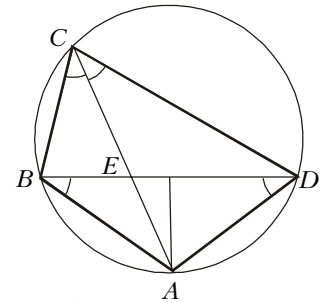


Рис. 13

Во вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180° . Поэтому

$$\angle BCD = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ,$$

$$\angle ABD = \angle ACD = \frac{1}{2} \angle BCD = \frac{1}{2} \cdot 40^\circ = 20^\circ,$$

$$\angle CDB = \angle CAB = \angle EAB =$$

$$= 180^\circ - (\angle ABD + \angle BEA) = 180^\circ - (20^\circ + 110^\circ) = 50^\circ.$$

Упражнения

13. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E , $AB = BC$, DB – биссектриса угла D , $\angle ABC = 100^\circ$, $\angle BEA = 70^\circ$. Найдите угол CAD .

14 (МГУ, геогр. ф-т, 1994). В треугольнике KMN проведены высота NA , биссектриса NB и медиана NC , которые делят угол KNM на четыре равные части. Найдите высоту NA , биссектрису NB и медиану NC , если радиус описанной около треугольника KMN окружности равен R .

15. Найдите углы треугольника ABC , если его высота и медиана, проведенные из вершины C , делят угол ACB на 3 равные части.