Точка на окружности

В.АЛЕКСЕЕВ, В.ГАЛКИН, В.ПАНФЕРОВ, В.ТАРАСОВ

Задачи о точках, лежащих на окружности, о хордах и касательных, проходящих через эти точки, часто встречаются в вариантах вступительных экзаменов. С методами решения таких задач мы и собираемся познакомить читателей.

Напомним основные теоремы, которыми нам в дальнейшем придется часто пользоваться. Это прежде всего теоремы о вписанных углах, углах между хордами и касательными, углах с вершиной внутри и вне круга и, разумеется, теорема синусов. Причем теорему синусов часто бывает удобно применять в следующей формулировке: *если из точки A окружности радиуса R хорда BC длины a видна под углом* α, *то* $a = 2R\sin\alpha$ *(рис.1).*

Мы рекомендуем читателям вспомнить формулировки и доказательства упомянутых теорем. Ведь очень часто доказательство той или иной теоремы содержит в себе методы решения близких по формулировке задач.

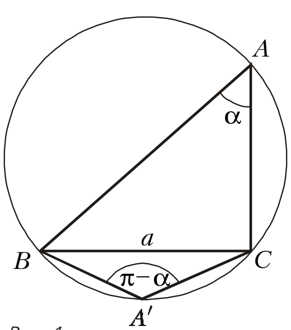

Рис. 1

В дальнейшем мы будем придерживаться стандартных обозначений сторон, углов и других элементов треугольника, т.е. полагать, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Радиус окружности, проходящей через три заданные точки K, L, M, будем обозначать как R_{KLM}.

Итак, приступим к решению задач.

Задача 1. *В треугольнике ABC даны сторона BC = a и* $\angle A = \alpha$. *Пусть I – центр вписанной окружности, H – ортоцентр (точка пересечения высот),* B_1 *и* C_1 *– основания высот, проведенных из вершин B и C. Найдите* R_{ABC}, R_{BIC}, R_{BHC}, *а также отрезки* B_1C_1 *и AH.*

Решение. По теореме синусов находим радиус описанной около треугольника ABC окружности:

$$R = R_{ABC} = \frac{a}{2\sin\alpha}.$$

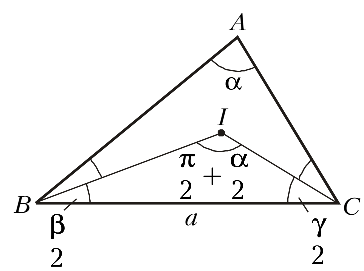

Рис. 2

Так как I – точка пересечения биссектрис (рис.2),

$$\angle BIC = \pi - \frac{\beta+\gamma}{2} = \pi - \frac{\pi-\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

(Заметим попутно, что $\angle BIC$ всегда тупой и выражается только через угол α.) По теореме синусов,

$$R_{BIC} = \frac{a}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Угол BHC также выражается через α, а именно, $\angle BHC = \pi - \alpha$. Кстати, здесь необходимо рассмотреть два возможных случая: $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис.3,*а*) и $\alpha > \frac{\pi}{2}$ (рис.3,*б*). Проследите это самостоятельно. Снова по теореме синусов

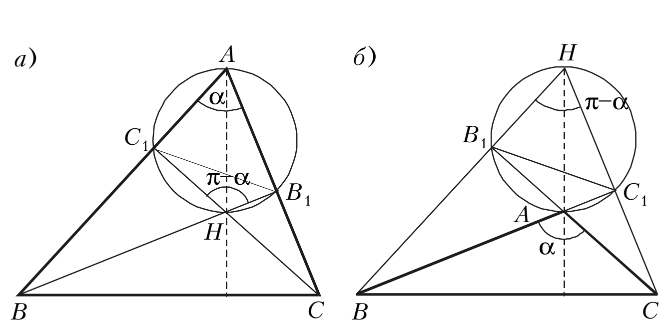

Рис. 3

получаем

$$R_{BHC} = \frac{BC}{2\sin(\pi - \alpha)} = \frac{a}{2\sin\alpha} = R\ .$$

Для отыскания AH заметим, что точки A, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности с диаметром AH (см. рис.3). По теореме синусов, $C_1B_1 = AH\sin\alpha$. Найдем отрезок B_1C_1. Для этого заметим, что треугольник B_1AC_1 подобен треугольнику ABC, ибо из прямоугольных треугольников BB_1A и CC_1A получаем

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = \cos\alpha$$

(или $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ при $\alpha > \frac{\pi}{2}$). Поэтому треугольники B_1AC_1 и ABC подобны с коэффициентом $|\cos\alpha|$. Но тогда

$$B_1C_1 = a|\cos\alpha|$$

и

$$AH = a|\operatorname{ctg}\alpha|\ .$$

Упражнения

1. Из точек A и A_1, лежащих по одну сторону от прямой BC, отрезок BC виден под одним и тем же углом $\alpha \neq 0$. Докажите, что около четырехугольника BAA_1C можно описать окружность.

2. Из точек A и A', лежащих по разные стороны от прямой BC, отрезок BC виден под углами α и $180° - \alpha$ соответственно. Докажите, что около четырехугольника $BACA'$ можно описать окружность.

3. Докажите, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.

4. Докажите, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда $AB + CD = AD + BC$.

5. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AB_1C_1 (см. задачу 1).

Задача 2 (МГУ, мехмат, 1972). *В треугольнике KLM угол L тупой, а длина стороны KM равна 6. Найдите радиус описанной около треугольника KLM окружности, если известно, что на этой окружности лежит центр окружности, проходящей через вершины K, M и точку пересечения высот треугольника KLM.*

Решение. Обозначим через H ортоцентр треугольника KLM, через O – центр окружности, проходящей через точки K, M, H (рис.4). По условию угол L тупой. Поэтому точка H лежит вне $\triangle KLM$, точка L является точкой пересечения высот в $\triangle KHM$ и лежит внутри $\triangle KHM$, а треугольник KHM – остроугольный (его углы при вершинах K, H, M являются острыми углами прямоугольных треугольников MKM_1, MHM_1, KMK_1 соответственно).

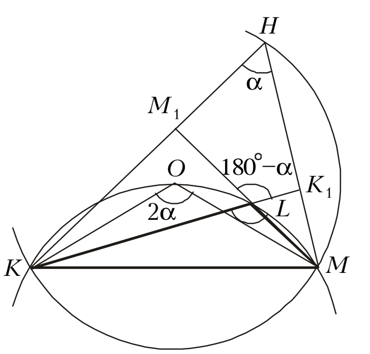

Рис. 4

Пусть $\angle KHM = \alpha$. Тогда центральный угол KOM равен 2α. Из точек O и L окружности KLM хорда KM видна под одним и тем же углом: $\angle KLM = \angle KOM = 2\alpha$. Но $\angle KLM = \angle K_1LM_1 = 180° - \alpha$, так как в четырехугольнике LK_1HM_1 углы при вершинах K_1 и M_1 прямые. Поэтому $2\alpha = 180° - \alpha$, т.е. $\alpha = 60°$, $\angle KLM = 180° - 60° = 120°$, и по теореме синусов искомый радиус равен

$$R_{KLM} = \frac{KM}{2\sin\angle KLM} = \frac{6}{2\sin 120°} = 2\sqrt{3}\ .$$

Упражнение 6. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, равен 1. Известно, что на этой окружности лежит центр окружности, проходящей через вершины A, C и точку пересечения высот треугольника ABC. Найдите длину стороны AC.

Задача 3 (МГУ, биофак, 1990). *Из точки M на окружности проведены три хорды: $MN = 1$, $MP = 6$, $MQ = 2$. При этом углы NMP и PMQ равны. Найдите радиус окружности.*

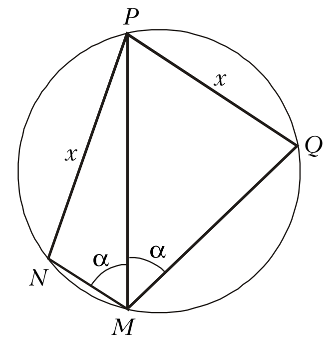

Рис. 5

Решение. Пусть R – искомый радиус, $\angle NMP = \angle QMP = \alpha$, $NP = x$ (рис. 5). Тогда $PQ = 2R\sin\alpha = x$ (в окружности против равных вписанных углов лежат равные хорды). Теорема косинусов для $\triangle MPN$ и $\triangle MPQ$ дает систему относительно x и $\cos\alpha$:

$$\begin{cases} x^2 = 1^2 + 6^2 - 2\cdot 1\cdot 6\cdot\cos\alpha, \\ x^2 = 2^2 + 6^2 - 2\cdot 2\cdot 6\cdot\cos\alpha, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x = \sqrt{34}, \\ \cos\alpha = \dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

а

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}\ .$$

Значит,

$$R = \frac{x}{2\sin\alpha} = 2\sqrt{\frac{34}{15}}\ .$$

Упражнение 7. Через вершину угла A проведена окружность, пересекающая стороны угла в точках M и N. Биссектриса этого угла пересекает окружность в точке P. Найдите радиус окружности, если $AM = 1$, $AN = 2$, $AP = 4$.

Задача 4 (МГУ, физфак, 1971). *Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от вершины E до прямых AB, BC и CD равны a, b и c соответственно. Найдите расстояние от вершины E до диагонали AD.*

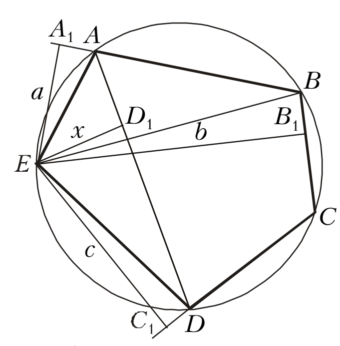

Рис. 6

Решение. Докажем следующее свойство точки E окружности (рис.6):

Если $A_1E = a$, $B_1E = b$, $C_1E = c$, $D_1E = x$ – соответственно, расстояния от точки E окружности до прямых AB, BC, CD, AD, образующих вписанный четырехугольник $ABCD$, то

$$ac = bx.$$

Доказательство вытекает из наличия двух пар подобных прямоугольных треугольников, имеющих общие гипотенузы, а значит, и одинаковые коэффициенты подобия. Действительно, вписанные углы ABE и ADE опираются на дугу AE и потому равны, значит, треугольники BA_1E и DD_1E подобны с коэффициентом $k = \dfrac{BE}{DE} = \dfrac{a}{x}$.

Далее, углы B_1BE и C_1DE равны, так как дополняют один и тот же угол CDE до 180° (по свойству вписанного четырехугольника $ABCD$), значит, треугольники BB_1E и DC_1E тоже подобны с тем же коэффициентом $k = \dfrac{BE}{DE} = \dfrac{b}{c}$.

Окончательно имеем

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{c} \Rightarrow ac = bx .$$

Искомое расстояние равно $x = \dfrac{ac}{b}$.

Упражнение 8 (МГУ, физфак, 1971). В окружность вписана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). На дуге CD, не содержащей вершин A и B, взята точка S. Точки P, Q, M и N являются основаниями перпендикуляров, опущенных из S на прямые CD, AB, AD и BC соответственно. Известно, что $SM = a$, $SN = b$, $SP = c$. Найдите отношение площадей треугольников MQS и MPS.

Задача 5 (МГУ, геогр. ф-т, 1989). *В выпуклом четырехугольнике ABCD проведены диагонали AC и BD. Известно, что AD = 2, $\angle ABD = \angle ACD$ = 90° и расстояние между точкой пересечения биссектрис треугольника ABD и точкой пересечения биссектрис треугольника ACD равно $\sqrt{2}$. Найдите длину стороны BC.*

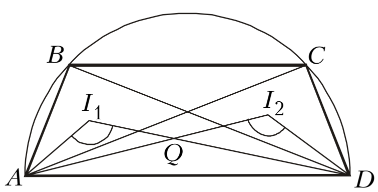

Рис. 7

Решение. Из точек B и C отрезок AD виден под одним и тем же (прямым) углом. Значит, четырехугольник $ABCD$ является вписанным в окружность с диаметром $AD = 2$ (рис.7), причем

$$BC = 2R \sin \angle BAC, \text{ где } R = \frac{1}{2} AD = 1 .$$

Задача, следовательно, сводится к отысканию угла BAC.

Если из точки B окружности отрезок AD виден под углом φ, то из центра I_1 вписанной в $\triangle ABD$ окружности отрезок AD виден под углом $\dfrac{\pi + \varphi}{2}$ (см. задачу 1). Так как $\angle ABD = \angle ACD = \dfrac{\pi}{2}$, I_1 и I_2 − центры вписанных в $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ окружностей, то

$$\angle AI_1D = \angle AI_2D = \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} .$$

Значит, четырехугольник AI_1I_2D тоже является вписанным в окружность. Ее радиус

$$R_1 = \frac{AD}{2\sin \angle AI_1D} = \frac{2}{2\sin \dfrac{3\pi}{4}} = \sqrt{2} .$$

Так как $I_1I_2 = 2R_1 \sin \angle I_1AI_2$, то

$$\sin \angle I_1AI_2 = \frac{I_1I_2}{2R_1} = \frac{1}{2} .$$

Аналогично,

$$\sin \angle I_1DI_2 = \frac{1}{2} .$$

Вписанные углы I_1AI_2 и I_1DI_2 − острые, так как каждый из подобных треугольников I_1QA и I_2QD (где $Q = AI_2 \cap DI_1$) уже имеет тупой угол. Значит,

$$\angle I_1AI_2 = \angle I_1DI_2 = \frac{\pi}{6} .$$

Докажем, что $\angle BAC = 2\angle I_1AI_2 = 2\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$. Действительно, угол BAC есть разность двух углов BAD и CAD ($\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD$), а угол I_1AI_2 образован биссектрисами последних. Но тогда

$$\angle I_1AI_2 = \angle I_1AD - \angle I_2AD = \frac{1}{2}\angle BAD - \frac{1}{2}\angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC ,$$

откуда

$$\angle BAC = \frac{\pi}{3}, \text{ а } BC = \sqrt{3} .$$

Упражнения

9. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC, $AD = 7$, $BC = 3$, $\angle ACD = 60°$. Известно, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности и перпендикуляр, проведенный из точки A к стороне CD, делит угол BAD пополам. Найдите длину диагонали AC.

10. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ проведены диагонали KM и LN. Известно, что $\angle KLM = \angle KMN = 60°$, $LM = \sqrt{3}$ и расстояние между точкой пересечения биссектрис треугольника KLN и точкой пересечения биссектрис треугольника KMN равно 1. Найдите длину стороны KN.

11 (МГУ, геогр. ф-т, 1986). Внутри треугольника ABC взята точка K. Известно, что длина стороны BC равна 1, длина стороны AB равна $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, а величины углов ABC, AKB и CKB равны 30°, 120° и 120° соответственно. Найдите длину отрезка BK.

Задача 6 (МГУ, геогр. ф-т, 1986). *В выпуклом четырехугольнике ABKC длина стороны AB равна $\sqrt{3}$, длина диагонали BC равна 1, а величины углов ABC, BKA и BKC равны 120°, 30° и 60° соответственно. Найдите длину стороны BK.*

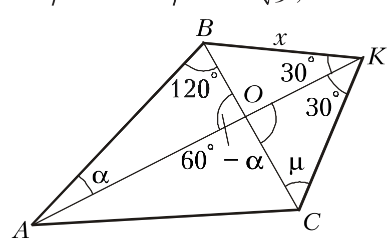

Рис. 8

Решение. Отрезок BK виден из точек A и C под углами $\angle BAK = \alpha$ и $\angle BCK = \mu$ соответственно (рис.8). Из треугольников AOB и KOC получаем

$$\angle AOB = \angle COK = 180° - \angle ABO - \angle BAK = 180° - 120° - \alpha = 60° - \alpha ,$$

$$\mu = 180° - \angle COK - \angle OKC = 180° - \left(60° - \alpha\right) - \left(60° - 30°\right) = 90° + \alpha .$$

Найдем радиусы описанных около $\triangle ABK$ и $\triangle CBK$ окружностей:

$$R_{ABK} = \frac{AB}{2\sin \angle AKB} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin 30°} = \sqrt{3} ,$$

$$R_{BCK} = \frac{BC}{2\sin \angle BKC} = \frac{1}{2\sin 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

и выразим через них искомую длину $BK = x$:

$$\begin{cases} x = 2R_{ABK}\sin\alpha \\ x = 2R_{BCK}\sin\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{3}\sin\alpha \\ x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\alpha, \end{cases}$$

откуда $\operatorname{ctg}\alpha = 3$, и

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Значит,

$$x = 2\sqrt{3}\,\frac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Задача 7. *Биссектриса DE треугольника ADC продлена до пересечения с описанной окружностью в точке B. а) Известно, что* $BD = l$ *и* $\angle ADC = \beta$. *Найдите площадь четырехугольника ABCD. б) Известны длины отрезков DE = m и BE = n, на которые отрезок BD рассекается другой диагональю AC. Найдите длины отрезков AB и BC.*

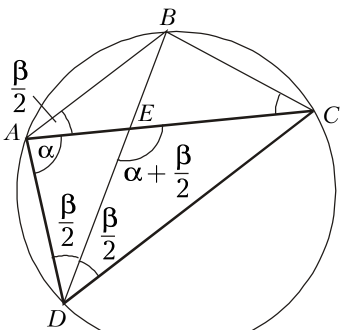

Рис. 9

Решение. а) Для искомой площади S имеем (рис.9)

$$S = \frac{1}{2}BD\cdot AC\cdot\sin\angle DEC =$$

$$= \frac{1}{2}BD\cdot 2R\sin\angle ADC\cdot\sin\angle DEC.$$

Из $\triangle ADE$ и $\triangle ABE$ ясно, что

$$\angle DEC = \alpha + \frac{\beta}{2} = \angle DAB, \text{ где } \alpha = \angle DAE,$$

$$\frac{\beta}{2} = \angle ADE = \angle CDE = \angle BAE = \frac{1}{2}\overset{\cup}{BC}.$$

Поэтому

$$S = \frac{1}{2}BD(2R\sin\angle DEC)\sin\angle ADC =$$

$$= \frac{1}{2}BD(2R\sin\angle DAB)\sin\angle ADC =$$

$$= \frac{1}{2}BD\cdot BD\cdot\sin\angle ADC = \frac{1}{2}l^2\sin\beta.$$

б) Ответ вытекает из подобия $\triangle ABE$ и $\triangle DBA$ (по двум углам):

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow AB^2 =$$

$$= BD\cdot BE \Rightarrow \mathrm{AB} =$$

$$= BC = \sqrt{(m+n)n}.$$

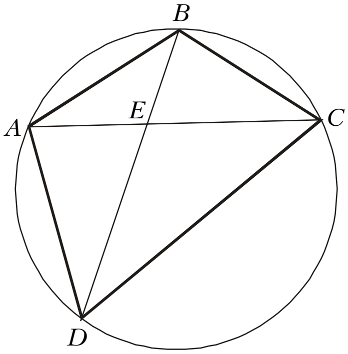

Рис. 10

Задача 8 (МГУ, мехмат, 1997). *Диагонали вписанного в окружность четырехугольника ABCD пересекаются в точке E, причем* $\angle ADB = \frac{\pi}{8}$, *BD = 6 и* $AD\cdot CE = DC\cdot AE$. *Найдите площадь четырехугольника ABCD.*

Решение. Конфигурация этой задачи (рис.10) напоминает предыдущую. Из условия имеем

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{CE}.$$

В треугольнике ADC отрезок DE рассекает противоположную сторону AC на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Значит, DE – биссектриса в $\triangle ADC$. Докажем это.

Пусть биссектриса DE_1 не совпадает с DE. Тогда по свойству биссектрисы

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE_1}{CE_1}, \text{ или } \frac{AE_1}{CE_1} = \frac{AE}{CE},$$

но это значит, что точки E_1 и E совпадают.

Итак, BD – биссектриса. Осталось воспользоваться результатом предыдущей задачи. Так как по условию $BD = l = 6$, $\angle ADC = 2\angle ADB = 2\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, то искомая площадь равна

$$S = \frac{1}{2}BD^2\sin\angle ADC = \frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\sin\frac{\pi}{4} = 9\sqrt{2}.$$

Задача 9 (МГУ, мехмат, 1997). *В окружности проведены хорды AC и BD, пересекающиеся в точке E, причем касательная к окружности, проходящая через точку C, параллельна BD. Известно, что AB : BE = 3 : 1 и* $S_{\triangle ADC} = 18$. *Найдите площадь треугольника CDE.*

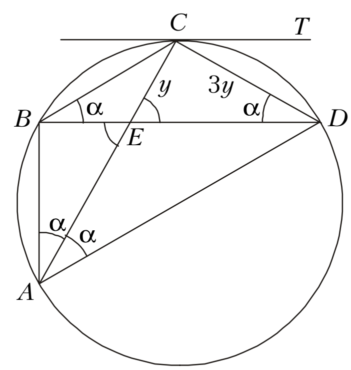

Рис. 11

Решение. Задача сводится к нахождению отношения $CE : AC$. Действительно, высота h_D, проведенная из вершины D, является общей для треугольников CDE и ADC (рис.11). Поэтому

$$\frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}CE\cdot h_D}{\frac{1}{2}AC\cdot h_D} = \frac{CE}{AC}.$$

Касательная CT параллельна BD. Поэтому $BC = DC$, $\overset{\cup}{BC} = \overset{\cup}{DC}$. Обозначим $\angle CBD = \angle CDB = \alpha$. По теореме о вписанном угле,

$$\angle BAC = \frac{1}{2}\overset{\cup}{BC} = \angle BDC = \alpha,$$

$$\angle DAC = \frac{1}{2}\overset{\cup}{CD} = \angle CBD = \alpha,$$

т.е. хорда AC является биссектрисой угла BAD.

Имеем стандартную конфигурацию: биссектриса AE в $\triangle ABD$ продолжена до пересечения с описанной (около $\triangle ABD$) окружностью, т.е. во вписанном четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла. Рассмотрим две пары подобных треугольников. Во-первых, $\triangle BAE \backsim \triangle CDE$ по двум углам: $\angle BAE = \angle CDE = \alpha$, $\angle BEA = \angle DEC$. Поэтому $BE : BA = CE : CD = 1 : 3$. Пусть $CE = y$, тогда $CD = 3y$. Кроме того, $\triangle CDE \backsim \triangle CAD$ по двум углам: $\angle CDE = \angle CAD = \alpha$, а угол при вершине C – общий.

Поэтому

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow AC = \frac{CD^2}{CE} = \frac{(3y)^2}{y} = 9y .$$

Значит,

$$\frac{CE}{AC} = \frac{y}{9y} = \frac{1}{9},$$

и искомая площадь равна

$$S_{\triangle CDE} = \frac{CE}{AC} \cdot S_{\triangle ADC} = \frac{1}{9} \cdot 18 = 2 .$$

Упражнение 12. В окружности проведены хорды AC и BD, пересекающиеся в точке E, причем касательная к окружности, проходящая через точку A, параллельна BD. Известно, что $CD : ED = 3 : 2$, $S_{\triangle ABE} = 8$. Найдите площадь треугольника ABC.

Задача 10. *Биссектриса AA_1 треугольника ABC продлена до пересечения в точке A_2 с описанной окружностью (рис.12). а) Докажите, что*

$$\angle AA_1C = \angle ABA_2 ,$$

$$\angle AA_1B = \angle ACA_2 .$$

б) Докажите, что $l_a^2 = bc - mn$, где l_a – биссектриса угла A, $AC = b$, $AB = c$, $A_1C = m$, $A_1B = n$.

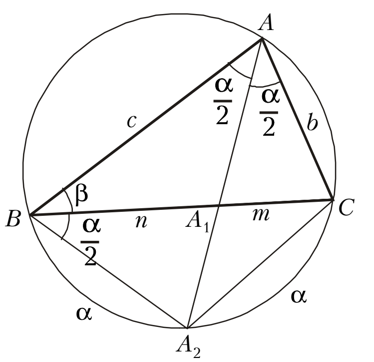

Рис. 12

Решение. а) В точке A_1 пересекаются хорды AA_2 и BC. С учетом теоремы о вписанном угле имеем две пары подобных треугольников (по двум углам) – это треугольники AA_1B и CA_1A_2, а также AA_1C и BA_1A_2. Каждое из указанных подобий дает известное свойство отрезков хорд: $AA_1 \cdot A_1A_2 = BA_1 \cdot A_1C$, откуда

$$l_a x = mn , \qquad (*)$$

где $x = A_1A_2$. Поскольку

$$\angle BAA_2 = \angle CAA_2 = \angle CBA_2 = \angle BCA_2 = \frac{\alpha}{2},$$

где $\alpha = \angle BAC$, получаем, что

$$\triangle AA_2B \sim \triangle ACA_1 \sim \triangle BA_2A_1 ,$$

а также

$$\triangle AA_2C \sim \triangle ABA_1 \sim \triangle CA_2A_1 .$$

Из доказанных подобий следует, что, например,

$$\angle AA_1C = \angle ABA_2 .$$

Иначе равенство этих же углов можно доказать непосредственно вычислением:

$$\angle AA_1C = \frac{\alpha}{2} + \beta - \text{ как внешний угол для } \triangle ABA_1 ,$$

$$\angle ABA_2 = \frac{\alpha}{2} + \beta - \text{ как угол в } \triangle ABA_2 .$$

Значит,

$$\angle AA_1C = \angle ABA_2 .$$

Аналогичными способами можно доказать равенство

$$\angle AA_1B = \angle ACA_2 .$$

б) Из подобия $\triangle AA_2B$ и $\triangle ACA_1$ имеем

$$\frac{AA_2}{AC} = \frac{AB}{AA_1} \Leftrightarrow \frac{l_a + x}{b} = \frac{c}{l_a} \Rightarrow l_a^2 + l_a x = bc ,$$

откуда, с учетом $(*)$, находим

$$l_a^2 = bc - mn .$$

Мы получили важную формулу, позволяющую в некоторых случаях вычислять биссектрису угла треугольника.

Задача 11. *Диагонали выпуклого четырехугольника ABCD пересекаются в точке E, AB = AD, CA – биссектриса угла C, $\angle BAD = 140°$, $\angle BEA = 110°$. Найдите угол CDB.*

Решение. Мы уже встречались со стандартным построением – продолжением биссектрисы треугольника до пересечения с описанной окружностью. В полученном при этом вписанном четырехугольнике (например, четырехугольнике $BCDA$) оказываются равными две вновь полученные стороны ($BA = DA$, так как по теореме о вписанном угле $\angle DBA = \angle BDA = \frac{1}{2}\angle BCD$).

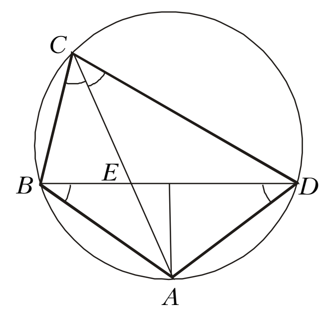

Рис. 13

В данной задаче ситуация обратная. Известно (рис.13), что отрезок CE – биссектриса угла C в $\triangle BCD$; биссектриса CE продолжена так, что в четырехугольнике $BCDA$ равны стороны BA и DA (по условию). Докажем, что четырехугольник $BCDA$ является вписанным. Достаточно убедиться, что описанная около $\triangle BCD$ окружность пройдет через точку A. Действительно, так как $BA = AD$, то $\angle DBA = \angle BDA$. Поэтому середина дуги BmD, как и точка A, лежит на биссектрисе угла BCD и на серединном перпендикуляре к хорде BD. Значит, точка A совпадает с серединой дуги BmD, и четырехугольник $BCDA$ является вписанным.

Во вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°. Поэтому

$$\angle BCD = 180° - 140° = 40° ,$$

$$\angle ABD = \angle ACD = \frac{1}{2}\angle BCD = \frac{1}{2} \cdot 40° = 20° ,$$

$$\angle CDB = \angle CAB = \angle EAB =$$

$$= 180° - (\angle ABD + \angle BEA) = 180° - (20° + 110°) = 50° .$$

Упражнения

13. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, $AB = BC$, DB – биссектриса угла D, $\angle ABC = 100°$, $\angle BEA = 70°$. Найдите угол CAD.

14 (МГУ, геогр. ф-т, 1994). В треугольнике KMN проведены высота NA, биссектриса NB и медиана NC, которые делят угол KNM на четыре равные части. Найдите высоту NA, биссектрису NB и медиану NC, если радиус описанной около треугольника KMN окружности равен R.

15. Найдите углы треугольника ABC, если его высота и медиана, проведенные из вершины C, делят угол ACB на 3 равные части.