8. Положим $S(n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\frac{A(n)}{B(n)}$, где $A(n)$ и $B(n)$ взаимно просты. Нам понадобится оценка $B(n)>n/2$.

Предположим, что при всех $n\geq n_0$ число $A(n)$ является степенью простого. Пусть $p>n_0+5$ – простое число. Тогда $A(p-1)$ делится на p (слагаемые суммы $S(p-1)$ разбиваются на пары, для каждой из которых числитель суммы делится на p). Следовательно, $A(p-1)=p^k$, $k\in\mathbf{N}$.

Далее, докажем, что числитель $A\left(p^n-1\right)$ также кратен p (и, стало быть, является степенью p) при всех натуральных n. Проведем индукцию по n. База доказана. Переход $n-1\to n$. Имеем $S\left(p^n-1\right)=S\left(p^{n-1}-1\right)\big/p+S'$, где $S'=\sum_{d\leq p^n-1,d\not\vdots p}\frac{1}{d}$ (первое слагаемое как раз равно сумме слагаемых со знаменателями, делящимися на p). Сумма S' разбивается на несколько (а именно, p^{n-1}) сумм вида

$$\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{pk+i},\quad k=0,1,\ldots,p^{n-1}-1.$$

Каждая из них имеет числитель, делящийся на p, что устанавливается так же, как и для $S(p-1)$. Осталось убедиться, что числитель дроби $S\left(p^{n-1}-1\right)\big/p$ делится на p. Действительно, $A\left(p^{n-1}-1\right)=p^s$ в силу индукционного предположения, причем $s>1$ (вспомним, что $B\left(p^{n-1}-1\right)\geq p^{n-1}\big/2\geq p/2$, а $S\left(p^{n-1}-1\right)\geq S(n_0+4)\geq S(4)>2$). Положим

$$H_p(n)=S\left(p^n-p\right)-S\left(p^n-1\right)=\sum_{i=1}^{p-1}1\Big/\left(-p^n+i\right).$$

Если $n>k$, то числитель дроби $H_p(n)$ делится на p^k, но не на p^{k+1} (ибо $H_p(n)-S(p-1)$ – дробь, числитель которой делится на p^n). Отсюда получаем, что оба числителя $A\left(p^n-1\right)$ и $A\left(p^n-p\right)$ делятся на p, но один из них не делится на p^{k+1}. Значит, одна из дробей $S\left(p^n-1\right)$ и $S\left(p^n-p\right)$ не превосходит $\frac{2p^k}{\left(p^n-p\right)}<1$ при $n=k+2$ – противоречие.

XXXVI Всероссийская олимпиада школьников по физике

Теоретический тур

9 класс

1. $\rho=\frac{3\pi(1+n)^3}{GT^2}\approx 653$ кг/м^3.

2. Решение этой задачи (а также некоторых других задач) будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

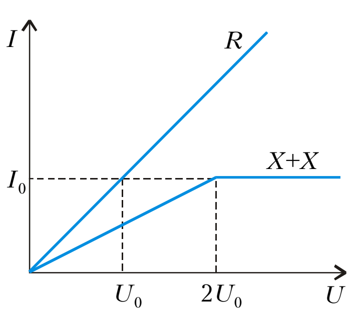

Рис. 12

4. 1) При $V\leq 2U_0$ $\eta_1=0{,}5$; при $V=4U_0$ $\eta_1=0{,}75$.
2) ВАХ получается сложением напряжений для каждого фиксированного значения силы тока (см. рис.12); $\eta_2=0{,}75$.
3) ВАХ получается сложением сил токов для каждого фиксированного значения напряжения (см. рис.13); $\eta_3=0{,}5$.

10 класс

1. Есть предельная скорость v_0, не зависящая от мощности. При этой скорости $F_{\text{сопр}}=F_{\text{тр max}}$, откуда $v_0=\sqrt{\mu mg/k}\approx 71$ м/с. С другой стороны, для поддержания постоянной скорости требуется мощность $N=F_{\text{сопр}}v=kv^3$, откуда получаем $v_{\max}(N)=(N/K)^{1/3}$. Скорость перестает расти начиная с мощности $N_0=\mu mg\sqrt{\mu mg/k}\approx 70$ кВт.

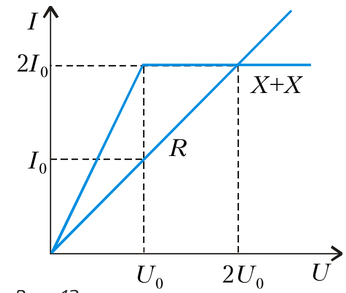

Рис. 13

2. $H\approx 2{,}8$ м; пройденные пути совпадают.

3. Искомую температуру найдем из квадратного уравнения $\frac{(T_1-T_2)^2}{(T_3-T_x)^2}=\frac{T_2}{T_x}$, откуда $T_{x1}=232$ К, т.е. $t_{x1}=-41$ °С, а второй корень $T_{x2}=338$ К не подходит – он отвечает работе агрегата в качестве теплового насоса.

5. $Q_1=C\mathcal{E}^2\big/2$, $Q_2=C\mathcal{E}^2\big/4$.

11 класс

1. $x_0=\frac{\omega^2}{3ag}$, $y_0=\frac{\omega^6}{27a^2g^3}$; $T=\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{1+\frac{\omega^8}{9a^2g^4}}$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
В.Д.Акатьева, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.И.Пацхверия, Л.В.Тишков, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №