стеме, соответствующей тройке A, B, C. Если $x_A = x_B$ (случай $x_A = x_C$ аналогичен), то $\operatorname{tg} \angle BAC = \pm \dfrac{x_C - x_A}{y_B - y_A}$ рационален (или не существует). Если же $x_B \neq x_A$ и $x_C \neq x_A$, то числа $p = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ и $q = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$ рациональны. Но $p = \operatorname{tg} \alpha$, $q = \operatorname{tg} \beta$, где α и β – углы, образуемые лучами AB и AC с положительным направлением оси Ox, поэтому из формулы

$$\operatorname{tg} \angle CAB = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{p - q}{1 + pq}$$

следует рациональность $\operatorname{tg} \angle BAC$ (или тангенс не существует, если $pq = -1$). Аналогично, рациональными являются тангенсы углов всех треугольников с вершинами в данных точках. Рассмотрим систему координат с началом A и единичным вектором по оси Ax, равным $\overrightarrow{AB}$. Для любой точки D нашего множества $\operatorname{tg} \angle DAB$ и $\operatorname{tg} \angle DBA$ рациональны, поэтому уравнения прямых AD и BD имеют рациональные коэффициенты. Тогда и точка D имеет рациональные координаты. Изменив масштаб, мы получим целочисленные координаты у всех точек.

3. *Указание*. Достаточно доказать это неравенство при $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ (при $x = \dfrac{\pi}{4}$ оно очевидно, а при $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$ получается заменой $y = \dfrac{\pi}{2} - x$). Для таких x докажите неравенства

$$\cos^k x - \sin^k x \geq \cos^{k+2} x - \sin^{k+2} x \quad \text{при } k \geq 2$$

и

$$\frac{\cos^n x - \sin^n x}{\cos^k x - \sin^k x} \leq \frac{\cos^{n-1} x - \sin^{n-1} x}{\cos^{k-1} x - \sin^{k-1} x} \quad \text{при } n \geq k > 1.$$

Убедитесь, что исходное неравенство сводится к случаям $m = 1$, $n = 3$ и $m = 1$, $n = 2$, для которых оно почти очевидно.

4. Сначала докажем, что если с любой площади выходит не более двух улиц, то площади можно покрасить в 13 цветов так, чтобы ни с какой площади нельзя было попасть на площадь того же цвета, проехав менее трех улиц. Для этого рассмотрим следующий вспомогательный ориентированный граф: его вершинами будут площади, а ориентированными ребрами будут соединены пары площадей, между которыми в нашем городе есть путь, проходящий не более чем по двум улицам. Легко видеть, что в этом графе из каждой вершины выходит не более 6 ребер. Нужно доказать, что вершины этого графа можно раскрасить в 13 цветов правильным образом. Это утверждение легко доказывается индукцией по числу вершин. Действительно, в случае, если вершин не больше 13, утверждение очевидно. Далее, легко видеть, что если в ориентированном графе из каждой вершины выходит не более 6 ребер, то существует вершина, в которую входит не более 6 ребер. Удалив из графа эту вершину, мы получим граф, удовлетворяющий нашему условию и содержащий меньшее число вершин. По индукционному предположению, мы можем раскрасить вершины этого графа в 13 цветов, после чего удаленную вершину мы также можем покрасить в один из цветов, так как она соединена не более чем с 12 вершинами. Теперь для каждого цвета разделим все площади данного цвета на 78 типов, в зависимости от того, на площади каких цветов ведут улицы, выходящие с данной площади. Поскольку других цветов 12, для каждого цвета есть 12 вариантов, в которых обе улицы ведут на площади одного цвета, и $\dfrac{12 \cdot 11}{2} = 66$ вариантов, в которых они ведут на площади разных цветов. Итого, 78 вариантов. Таким образом, мы можем разбить все площади на $78 \cdot 13 = 1014$ районов.

Осталось доказать, что полученное разбиение подходит.

5. 10010.

Пусть для натурального числа n имеют место указанные представления: $n = a_1 + \ldots + a_{2002} = b_1 + \ldots + b_{2003}$. Воспользуемся тем, что каждое из чисел $a_1, \ldots, a_{2002}$ дает такой же остаток при делении на 9, что и сумма цифр; обозначим этот остаток через r ($0 \leq r \leq 8$), а соответствующий остаток для чисел $b_1, \ldots, b_{2003}$ – через s ($0 \leq s \leq 8$).

Тогда $n - 2002r$ и $n - 2003s$ кратны 9, а значит, и число

$$(n - 2002r) - (n - 2003s) = 2003s - 2002r = 2003(r + s) - 4005r$$

кратно 9. Число $4005r$ также кратно 9, а число 2003 взаимно просто с 9; отсюда следует, что число $r + s$ кратно 9.

Если при этом $r = s = 0$, то $n \geq 9 \cdot 2003$ (поскольку $b_1, \ldots, b_{2003}$ делятся на 9). Если же $r \neq 0$, то $r + s = 9$, и потому имеет место по крайней мере одно из неравенств $r \geq 5$ или $s \geq 5$; для числа n получаются неравенства $n \geq 5 \cdot 2002$ и $n \geq 5 \cdot 2003$ соответственно. А так как $10010 = 5 \cdot 2002 = 4 \cdot 2002 + 2002 \cdot 1$ и числа 4 и 2002 имеют одинаковую сумму цифр, то число 10010 – искомое.

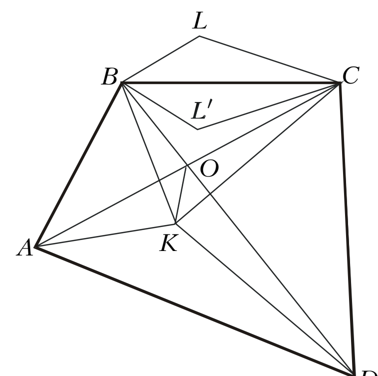

Рис. 10

6. Будем считать, что K лежит в $\triangle AOD$ (все остальные случаи разбираются аналогично). Пусть L' – точка, симметричная L относительно BC (рис.10). Тогда

$$\angle L'BO = \angle OBC - \angle L'BC = \angle OBC - \angle LBC,$$

но $\angle OBC = \angle OAD$, так как $ABCD$ вписанный, следовательно,

$$\angle L'BO = \angle OAD - \angle KAD = \angle OAK = \angle OBK,$$

так как $ABOK$ вписанный. Аналогично, $\angle L'CO = \angle OCK$.

Далее, $\angle BKO = \angle BAO = \angle CDO = \angle CKO$, так как четырехугольники $ABCD$, $ABOK$ и $CDKO$ вписанные.

Теперь рассмотрим четырехугольник $BL'CK$ (рис.11). Пусть N – точка пересечения CK и BL', M – точка пересечения

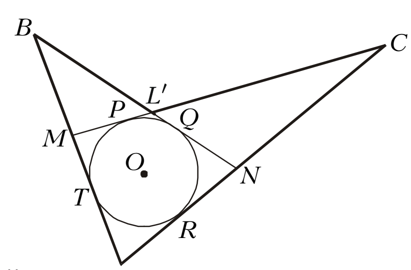

Рис. 11

BK и CL'. Так как CO – биссектриса $\angle MCK$, BO – биссектриса $\angle NBK$, а KO – биссектриса $\angle MKN$, то O равноудалена от сторон четырехугольника $ML'NK$ и является центром вписанной в него окружности. Пусть P, Q, R, T – точки касания этой окружности со сторонами ML', $L'N$, NK и KM соответственно. Тогда

$$CK + BL' = (CR + KR) + (BQ - L'Q) = CP + KT + BT - L'P =$$
$$= (KT + BT) + (CP - L'P) = KB + CL'.$$

Значит, $CK + BL = KB + CL$, и четырехугольник $BLCK$ является описанным, что и требовалось доказать.