первой степени, т.е. $R - Q = r(x - x_1)$, $r > 0$ (коэффициент при x^4 у P^2 положителен).
Значит, P делится на $x - x_1$, поэтому и $R + Q$ делится на $x - x_1$, и так как $R - Q$ делится на $x - x_1$, то R и Q делятся на $x - x_1$, т.е. $R = (x - x_1)R_1$, $Q = (x - x_1)Q_1$, где R_1 и Q_1 – квадратичные функции с положительными коэффициентами при x^2. Пусть $P = a(x - x_1)(x - x_2)$. Из равенства

$$a^2(x - x_2)^2 = (R_1 + Q_1)(R_1 - Q_1)$$

вытекает, что $R_1 - Q_1 = t = \text{const} > 0$. Следовательно, $R_1 = Q_1 + t$, поэтому

$$a^2(x - x_2)^2 = (2Q_1 + t)t,$$

т.е. $Q_1 = \dfrac{a^2}{2t}(x - x_2)^2 - \dfrac{t}{2}$ – трехчлен, имеющий два действительных корня. Тогда Q имеет три действительных корня.

2. Поскольку $MB^2 = AM \cdot DM = \dfrac{1}{2}MD^2$, а $KA^2 = \dfrac{1}{2}KC^2$ (рис.7), по теореме синусов получаем, что

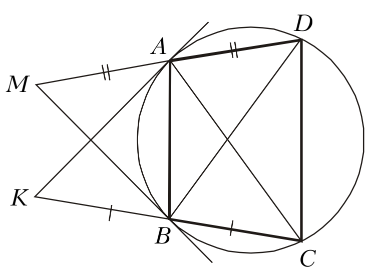

Рис. 7

$$\frac{\sin\angle ACK}{\sin\angle CAK} = \frac{AK}{KC} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{\sin\angle BDM}{\sin\angle DMB} = \frac{BM}{MD} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Но

$$\sin\angle ACK = \sin\angle BDM.$$

Следовательно,

$$\sin\angle CAK = \sin\angle DBM.$$

Поэтому либо $\angle CAK = \angle DBM$, либо

$$\angle CAK + \angle DBM = 180^\circ.$$

В первом случае треугольники CAK и BDM равны (они подобны по двум углам, а AB – их общая медиана к соответственным сторонам), так что $AD = BC$ и $AB \parallel CD$.
Во втором случае $\angle CAK = \angle CDA$, $\angle DBM = \angle DCB$, откуда $\angle CDA + \angle DCB = 180^\circ$, но тогда $AD \parallel BC$.

4. Построим граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра – дорогам, существовавшим в стране до начала всех преобразований. По условию, над этим графом несколько раз подряд проделывается следующая операция: удаляются все ребра некоторого простого цикла, а все вершины этого цикла соединяются с новой вершиной. Докажем, что в графе, получившемся после окончания всех преобразований, все вершины исходного графа будут иметь степень 1. Поскольку таких вершин как минимум 2002, это даст нам полное решение задачи.
Рассмотрим произвольную вершину v, принадлежащую исходному графу. По условию, при удалении этой вершины (и всех выходящих из нее ребер) из исходного графа образуется связный граф. Докажем, что это свойство сохраняется после применения к графу описанной в условии операции.
Рассмотрим произвольный граф G и вершину u этого графа, при удалении которой образуется связный граф. Пусть после применения к графу G описанной в условии операции образовался граф G'. Рассмотрим произвольный путь в графе G, не проходящий через u. В графе G' некоторые ребра этого пути могут быть удалены, но их концы должны быть соединены с новой вершиной (обозначим ее w). Таким образом, заменив минимальный участок пути, содержащий все удаленные ребра, на пару ребер, соединяющих концы этого участка с вершиной w, мы получим путь в графе G', имеющий те же концы и не проходящий через u. Это означает, что если мы удалим из графа G' вершину u, то для любых двух вершин получившегося графа мы можем найти соединяющий их путь. Для старых (отличных от w) вершин этот путь получается описанным выше способом из пути, соединяющего их в графе, образовавшемся при удалении u из графа G, а вершина w должна быть соединена ребром хотя бы с одной из старых вершин, которая соединена путями со всеми остальными вершинами данного графа. Таким образом, при удалении вершины u из графа G' также образуется связный граф.
Из доказанного следует, что после всех преобразований при удалении из получившегося графа вершины v образуется связный граф. Тогда, если степень вершины v в получившемся графе больше 1, то между двумя соединенными с v вершинами есть не проходящий через v путь. Этот путь вместе с вершиной v и двумя выходящими из нее ребрами образует в получившемся графе простой цикл, что по условию невозможно. Таким образом, степень вершины v в этом графе равна 1.

5. Поскольку

$$ab + bc + ca = \frac{9 - a^2 - b^2 - c^2}{2},$$

нужно доказать, что

$$2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 2\sqrt{c} + a^2 + b^2 + c^2 \geq 9.$$

Заметим, что $2\sqrt{a} + a^2 \geq 3a$. Действительно,

$$2\sqrt{a} + a^2 = \sqrt{a} + \sqrt{a} + a^2 \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt{a}\,a^2} = 3a.$$

Аналогично, $2\sqrt{b} + b^2 \geq 3b$, $2\sqrt{c} + c^2 \geq 3c$.
Осталось сложить полученные неравенства.

7. Пусть A_1, B_1 и C_1 – точки касания вписанной окружности с соответствующими сторонами $\triangle ABC$ (рис.8). Проведем через A_1 прямую a_1, параллельную биссектрисе угла A. Так как $\triangle AB_1C_1$ равнобедренный, то биссектриса угла A перпендикулярна B_1C_1, поэтому проведенная через A_1 прямая, будучи перпендикулярной B_1C_1, является высотой $\triangle A_1B_1C_1$.

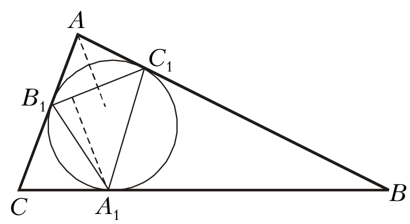

Рис. 8

Пусть A_0, B_0 и C_0 (рис.9) – середины соответствующих сторон $\triangle ABC$. Так как $\triangle ABC$ и $\triangle A_0B_0C_0$ гомотетичны с коэффициентом $-\dfrac{1}{2}$, то биссектрисы углов A и A_0 параллельны. Обозначим точку пересечения биссектрис $\triangle A_0B_0C_0$ через S. Как известно, точки A_1 и A' равноудалены от середины своей стороны (то же верно для точек B_1 и B', C_1 и C').

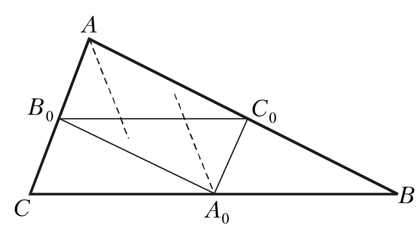

Рис. 9

Рассмотрим симметрию относительно точки S. При этой симметрии прямая a_1 перейдет в прямую a. Таким образом, при этой симметрии каждая из высот $\triangle A_1B_1C_1$ перейдет в одну из прямых a, b и c, следовательно, эти прямые пересекутся в точке, симметричной ортоцентру $\triangle A_1B_1C_1$ относительно центра S окружности, вписанной в серединный треугольник $A_0B_0C_0$.

11 класс

2. Поскольку в случае, когда все точки лежат на одной прямой, утверждение задачи очевидно, можно считать, что в нашем множестве найдутся точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Докажем, что $\operatorname{tg}\angle BAC$ либо рациональное число, либо не существует. Рассмотрим координаты этих точек в си-