пользуйтесь очевидным равенством $(2n-1)!!=\dfrac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$.

20. $\left[\dfrac{x}{2}\right]+\left[\dfrac{x}{3}\right]-\left[\dfrac{x}{6}\right]$.

21. Пусть $[x]=m$, $\{x\}=\alpha$, причем $\dfrac{k}{n}\le\alpha<\dfrac{k+1}{n}$, где $0\le k\le n-1$. Тогда

$$[nx]=[nm+n\{x\}]=mn+k.$$

В то же время

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-k-1}{n}\right]=(n-k)m,$$

$$\left[x+\frac{n-k}{n}\right]+\left[x+\frac{n-k+1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=km+k,$$

но это и значит, что

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$

Электростатическое поле в веществе

1. 1) $\Delta W=\dfrac{\varepsilon_0(1-\varepsilon)SU^2}{2d}\approx-3{,}2\cdot10^{-5}$ Дж,

$A=-\Delta W\approx3{,}2\cdot10^{-5}$ Дж;

2) $\Delta W=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon(\varepsilon-1)SU^2}{2d}\approx1{,}6\cdot10^{-4}$ Дж,

$A=\Delta W\approx1{,}6\cdot10^{-4}$ Дж.

2. $k=\dfrac{1}{\varepsilon+1}$. **3.** $h=\dfrac{\varepsilon-n}{\varepsilon-1}\dfrac{d}{n}\approx0{,}2$ мм.

4. $E=\dfrac{\varepsilon\mathsf{E}}{\varepsilon(d-h)+h}$ при $h<\dfrac{d}{2}$, $E=\dfrac{\mathsf{E}}{\varepsilon(d-h)+h}$ при $h>\dfrac{d}{2}$.

Точка на окружности

5. $a|\mathrm{ctg}\,\alpha|/2$. **6.** $\sqrt{3}$. **7.** $4\sqrt{770}/55$. **8.** ab/c^2.
9. 5. **10.** $\sqrt{3}$. **11.** $2/\sqrt{7}$. **12.** 18. **13.** 30°.
14. $R\sqrt{2}/2;\ R\sqrt{2}\big/\sqrt{2+\sqrt{2}};\ R$. **15.** 30°, 60°, 90°.

XXVIII Всероссийская олимпиада школьников по математике

Заключительный этап

9 класс

1. Нельзя. *Указание.* Докажите, что найдутся строка и столбец, все числа в которых не меньше 2002.

2. *Указание.* Докажите, что

$$\angle AO_1O_2=\frac{1}{2}\angle ABC,\ \text{а}\ \angle AO_2O_1=\frac{1}{2}\angle ACB.$$

3. Рассмотрим три синие точки A, B, C и не синюю D. Тогда $S_{ABC}\le S_{ABD}+S_{ACD}+S_{BCD}$.

Просуммируем это неравенство по всем таким четверкам. При этом каждый «синий» треугольник считается 12 раз, а каждый «сине-сине-несиний» – 4 раза. Таким образом, сумма площадей «синих» треугольников хотя бы в 3 раза меньше суммы площадей «сине-сине-несиних». Итого: сумма площадей «синих» треугольников составляет не более четверти суммы площадей треугольников, хотя бы две вершины которых синие. Аналогичное неравенство получим для двух других цветов. Так как рассмотренные группы не пересекаются, то и сумма площадей одноцветных треугольников составляет не более четверти суммы площадей всех треугольников.

5. Рассмотрим семь пар ладей, стоящих в соседних столбцах. Разности их координат по вертикали лежат в отрезке [1, 7], поэтому либо две из них совпадают (и тогда расстояния в соответствующих парах тоже совпадают), либо среди них есть все числа от 1 до 7. В частности, есть две ладьи, отстоящие друг от друга на 2 по вертикали и на 1 по горизонтали (пара A). Аналогично, либо найдутся две пары в соседних строках с равным расстоянием, либо есть две ладьи, отстоящие друг от друга на 1 по вертикали и на 2 по горизонтали (пара B). Тогда расстояния в парах A и B совпадают, а сами эти пары различны.

6. $n = k - 1$.

Построим пример, показывающий, что при большем n это невозможно. Пусть карты (сверху вниз) первоначально лежат так: сначала все нечетные (в произвольном порядке), потом четные, причем верхняя из них карта $2n$. Тогда первые k ходов однозначно определены – нечетные карты перекладываются на свободные позиции. Следующий ход, если $n > k$, невозможен, а если $n = k$, то можно лишь переложить карту $2n - 1$ обратно в изначальную стопку, что бессмысленно, ибо мы вернемся к предыдущей позиции. Поэтому эту стопку переложить нельзя.

Пусть $n < k$. Покажем, как можно организовать процесс перекладывания. Разобьем все карты на пары $(1, 2), \ldots, (2n-1, 2n)$, и сопоставим каждой паре по незанятой ячейке (хотя бы одна ячейка не сопоставлена никакой паре; назовем ее свободной). Теперь каждую карту сверху красной ячейки попытаемся положить в «ее» ячейку. Это может не получиться, только если эта карта имеет номер $2i$, а карта $2i - 1$ уже лежит в ячейке. Но тогда можно переместить карту $2i$ в свободную ячейку, сверху положить карту $2i - 1$, сопоставить этой ячейке нашу пару, а прежнюю сопоставленную назвать свободной. Таким образом, в результате мы получим карты, разложенные в ячейки по парам. Теперь, используя свободную ячейку, легко собрать их в колоду в правильном порядке.

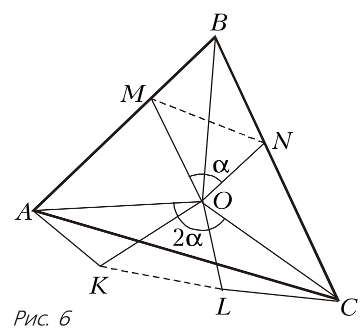

Рис. 6

7. Построим такие точки K и L, лежащие внутри угла AOC, что треугольники AKO и BMO, а также CLO и BNO соответственно равны (рис.6). Тогда $KO = OM$, $LO = ON$ и $\angle KOL=\angle AOC-\angle MOB-\angle BON=\angle MON$, поэтому треугольники KOL и MON равны, следовательно, $KL = MN$. Тогда периметр треугольника BMN равен $BM + MN + NB = AK + KL + LC \ge AC$.

8. Заметим, что среди выбранных чисел найдутся числа a и b, имеющие одинаковые остатки от деления на 2^{2n}. Докажем, что они – искомые.

Предположим, что a^2 делится на b. Тогда и $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ делится на b. Пусть $a=p\cdot2^{2n}+r$, $b=q\cdot2^{2n}+r$. Тогда $(p-q)^2\cdot2^{4n}$ делится на b, но поскольку b нечетное, то $(p-q)^2$ делится на b, откуда $|p-q|>2^n$ и $\max(a,b)=\max(p,q)\cdot2^{2n}+r>2^{3n}$, что невозможно по условию.

10 класс

1. Из условия следует, что R и один из многочленов P и Q – третьей степени. Пусть, например, R и Q – третьей степени, P – второй. Поменяв, если это нужно, знаки многочленов на противоположные, можно считать, что коэффициенты при x^3 у R и Q положительны. Тогда из равенства

$$P^2=R^2-Q^2=(R+Q)(R-Q),$$

где $R + Q$ – многочлен третьей степени, следует, что $R - Q$ –