Целая и дробная части числа

1. $[x] = -[x]$.

2. а) $\left(-1; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{17}}{2}; 4\right)$; б) $\left(\frac{13}{3}; \frac{16}{3}\right]$.

3. Пусть $a = [a] + \alpha$, где $\alpha \neq 0$, а $x = 1 - \alpha$. Тогда $[x + a] = 1 + [a]$, $[x] + [a] = [1 - \alpha] + [a] = [a]$, т.е. $[x + a] \neq [x] + [a]$.

4. См. рис.3. **5.** См. рис.4.

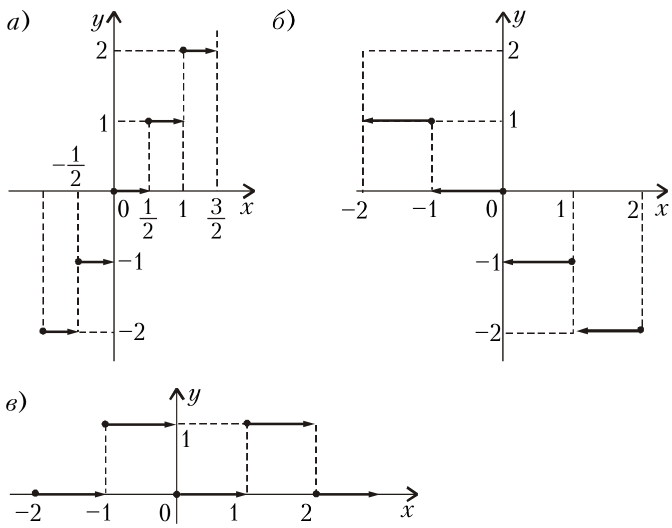

Рис. 3

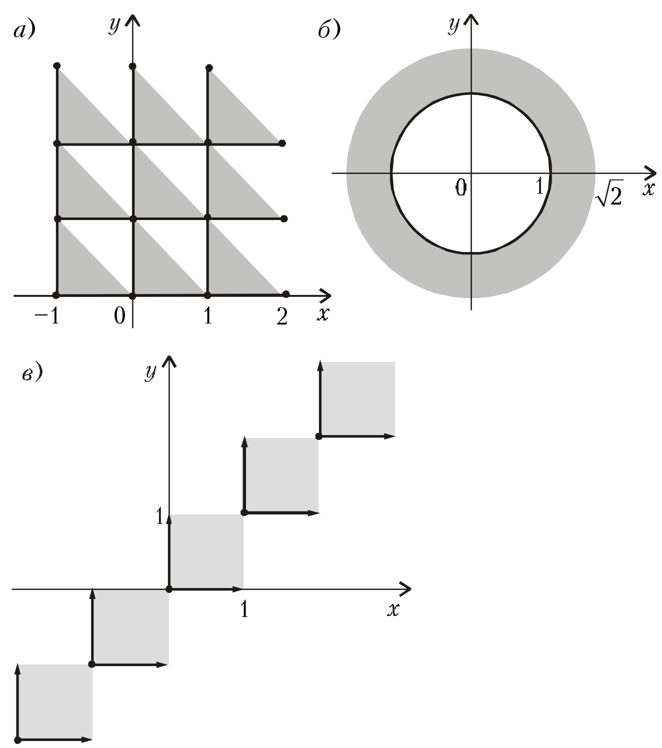

Рис. 4

6. Пусть $[x] = k$, $[y] = l$. Тогда $[x] + [y] + [x + y] = 2k + 2l + [\alpha + \beta]$, $[2x] + [2y] = 2k + 2l + [2\alpha] + [2\beta]$. Неравенство же $[\alpha + \beta] \le [2\alpha] + [2\beta]$ почти очевидно. Оно справедливо при $\alpha + \beta < 1$, а при $\alpha + \beta \ge 1$ хотя бы одно из чисел α или β не меньше $\frac{1}{2}$, так что $[\alpha + \beta] = 1 \le [2\alpha] + [2\beta]$.

7. См. рис.5.

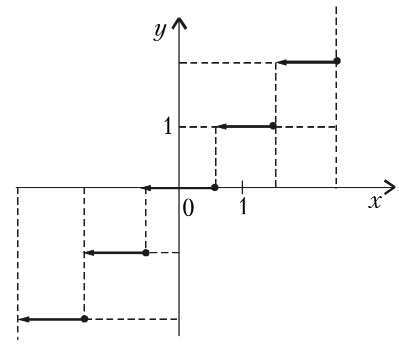

Рис. 5

9. Пусть $\alpha = \{x\}$. Тогда

$$\{k\{[x] + \alpha\}\} = \{k\alpha\} = \{k[x] + k\alpha\} = \{kx\}.$$

Уравнение имеет решение 0; $\frac{1}{2}$.

10. а) $\frac{2n+1}{6}$, где $n \in \mathbf{Z}$; б) $\frac{n}{7}$, где $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 7k$.

11. а) Прямые вида $y - x = n$, где $n \in \mathbf{Z}$.
б) См. рис.3, *а*).

12. Все $n < 0$; $\left[n; \sqrt{n^2+1}\right)$ при $n \ge 0$, $n \in Z$.

13. $\frac{19}{4}$. Пусть $[x] = k$. Тогда $\{x\} \ge \frac{3}{k}$, но это значит, что $k \ge 4$. При $k = 4$ получаем наименьшее значение дробной части $\{x\} = \frac{3}{4}$.

14. а) *Указание.* Если $k \le \sqrt{[x]} < k + 1$, то $k^2 \le [x] < (k+1)^2$, но тогда и $k^2 < [x] + \{x\} < (k+1)^2$, т.е. $k \le \sqrt{x} < k + 1$.
б) a − целое число. Решение аналогично решению пункта *а*). Пусть $[\log_a [x]] = k$, тогда $k \le \log_a [x] < k + 1$, $a^k \le [x] < a^{k+1}$. Если a − целое число, то тогда и $a^k < x < a^{k+1}$, т.е. $k < \log_a x < k + 1$. Если же a − не целое число, то существует натуральное k, для которого $x = a^k$ − тоже не целое. Но тогда

$$\left[\log_a a^k\right] = [k] = k > \log_a \left[a^k\right] \ge \left[\log_a \left[a^k\right]\right].$$

15. *Указание.* Пусть $\left(5 + \sqrt{26}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{26}$, где A_n и B_n − натуральные числа. Тогда $\left(5 - \sqrt{26}\right)^n = A_n - B_n\sqrt{26}$. Значит, $\left(5 + \sqrt{26}\right)^n + \left(5 - \sqrt{26}\right)^n = 2A_n$, $\left|\left(5 - \sqrt{26}\right)^n\right| = \frac{1}{\left(5 + \sqrt{26}\right)^n} < \frac{1}{10^n}$.

16. а) $n = 2$. При $n > 2$

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^m}\right] + \ldots < \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \ldots + \frac{n}{2^m} + \ldots = n.$$

б) Нет. в) Нет. Воспользуйтесь тем, что

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^m}\right] + \ldots < \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \ldots + \frac{n}{p^m} + \ldots = \frac{n}{p-1} < n - k$$

при достаточно больших n.

17. n. *Указание.* $(n+1)(n+2)\ldots(2n) = \frac{(2n)!}{n!}$.

18. Пусть p − простое число. Тогда

$$\left[\frac{n!}{p}\right] + \left[\frac{n!}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n!}{p^k}\right] + \ldots \ge (n-1)!\left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right] + \ldots\right).$$

(Мы воспользовались неравенством $[kx] \ge k[x]$ при натуральном k.)

19. а) Поскольку $(2n)!! = 2^n \cdot n!$, показатель степени двойки, на которую делится $(2n)!!$, равен $n + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^k}\right] + \ldots$, а для $p > 1$ этот показатель равен показателю для числа $n!$.

б) 0 при $p = 2$, $\sum_k \left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{k}\right]\right)$ при $p > 2$. *Указание.* Вос-