5. Можно ли расставить по кругу числа 1, 2, …, 60 в таком порядке, чтобы сумма любых двух чисел, между которыми находится одно число, делилась на 2, сумма любых двух чисел, между которыми находятся два числа, делилась на 3, …, сумма любых двух чисел, между которыми находятся шесть чисел, делилась на 7?

И.Рубанов

6. Пусть A' – точка на одной из сторон трапеции $ABCD$ такая, что прямая AA' делит площадь трапеции пополам. Точки B', C', D' определяются аналогично. Докажите, что точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ симметричны относительно середины средней линии трапеции $ABCD$.

Л.Емельянов

7. На отрезке [0; 2002] отмечены его концы и точка с координатой d, где d – взаимно простое с 1001 число. Разрешается отметить середину любого отрезка с концами в отмеченных точках, если ее координата целая. Можно ли, повторив несколько раз эту операцию, отметить все целые точки на отрезке?

И.Богданов, О.Подлипский

8. См. задачу 8 для 8 класса.

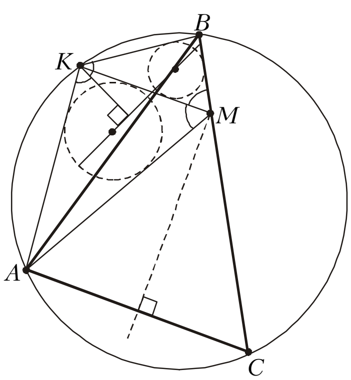
10 класс

1. Какова наибольшая длина арифметической прогрессии из натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с разностью 2, обладающей свойством: a_k^2+1 – простое при всех $k = 1, 2, \ldots, n$?

Н.Агаханов

2. В выпуклом многоугольнике на плоскости содержится не меньше m^2+1 точек с целыми координатами. Докажите, что в нем найдется $m + 1$ точка с целыми координатами, которые лежат на одной прямой.

В.Дольников



3. Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке M (см. рисунок). Биссектриса угла AMB пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K. Докажите, что прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников AKM и BKM, перпендикулярна биссектрисе угла AKB.

С.Берлов

4. Набор чисел $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям: $a_0=0$, $0 \le a_{n+1}-a_n \le 1$. Докажите неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^3 \le \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2 .$$

А.Храбров

5. На оси Ox произвольно расположены различные точки $X_1, \ldots, X_n$, $n \ge 3$. Построены все параболы, задаваемые приведенными квадратными трехчленами и пересекающие ось Ox в данных точках (и не пересекающие ось в других точках). Пусть $y=f_1, \ldots, y=f_m$ – функции, задающие эти параболы. Докажите, что парабола $y=f_1+\ldots+f_m$ пересекает ось Ox в двух точках.

Н.Агаханов

6. См. задачу 6 для 9 класса.

7. На отрезке [0; 2002] отмечены его концы и $n - 1 > 0$ целых точек так, что длины отрезков, на которые разбился отрезок [0; 2002], взаимно просты в совокупности. Разрешается разделить любой отрезок с концами в отмеченных точках на n равных частей и отметить точки деления, если они все целые. (Точку можно отметить второй раз, при этом она остается отмеченной). Можно ли, повторив несколько раз эту операцию, отметить целые точки на отрезке?

И.Богданов, О.Подлипский

8. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить все клетки доски размера 10×10 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце находились клетки не более чем пяти различных цветов?

Д.Храмцов

11 класс

1. Действительные числа x и y таковы, что для любых различных простых нечетных p и q число x^p+y^q рационально. Докажите, что x и y рациональны.

Н.Агаханов

2. Высота четырехугольной пирамиды $SABCD$ проходит через точку пересечения диагоналей ее основания $ABCD$. Из вершин основания опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на прямые SC, SD, SA и SB соответственно. Оказалось, что точки S, A_1, B_1, C_1, D_1 различны и лежат на одной сфере. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 проходят через одну точку.

Н.Агаханов

3. Набор чисел $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям: $a_0=0$, $a_{n+1} \ge a_n+1$. Докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 \ge \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 .$$

А.Храбров

4. Клетчатая плоскость раскрашена в n^2 цветов так, что в любом квадрате из $n\times n$ клеток встречаются все цвета. Известно, что в какой-то строке встречаются все цвета. Докажите, что существует столбец, раскрашенный ровно в n цветов.

И.Богданов, Г.Челноков

5. Пусть $P(x)$ – многочлен нечетной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x))=0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x)=0$.

И.Рубанов

6. На плоскости даны $n > 1$ точек. Двое по очереди соединяют еще не соединенную пару точек вектором одного из двух возможных направлений. Если после очередного хода какого-то игрока сумма всех нарисованных векторов нулевая, то выигрывает второй; если же ходить больше некуда, а нулевой суммы не было, то первый. Кто выигрывает при правильной игре?

Н.Агаханов

7. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, и проведены биссектрисы l_A, l_B, l_C, l_D внешних углов этого четырехугольника. Прямые l_A и l_B пересекаются в точке K, прямые l_B и l_C – в точке L, прямые l_C и l_D – в точке M, прямые l_D и l_A – в точке N. Докажите, что если окружности, описанные около треугольников ABK и CDM, касаются внешним образом, то и окружности, описанные около треугольников BCL и DAN, касаются внешним образом.

Л.Емельянов