Поэтому

$$\frac{CE}{CD}=\frac{CD}{AC}\Rightarrow AC=\frac{CD^2}{CE}=\frac{(3y)^2}{y}=9y\ .$$

Значит,

$$\frac{CE}{AC}=\frac{y}{9y}=\frac{1}{9}\,,$$

и искомая площадь равна

$$S_{\triangle CDE}=\frac{CE}{AC}\cdot S_{\triangle ADC}=\frac{1}{9}\cdot 18=2\,.$$

Упражнение 12. В окружности проведены хорды AC и BD, пересекающиеся в точке E, причем касательная к окружности, проходящая через точку A, параллельна BD. Известно, что $CD : ED = 3 : 2$, $S_{\triangle ABE}=8$. Найдите площадь треугольника ABC.

Задача 10. *Биссектриса AA_1 треугольника ABC продлена до пересечения в точке A_2 с описанной окружностью (рис.12). а) Докажите, что*

$$\angle AA_1C=\angle ABA_2\,,$$

$$\angle AA_1B=\angle ACA_2\,.$$

б) Докажите, что $l_a^2=bc-mn$, где l_a – биссектриса угла A, $AC=b$, $AB=c$, $A_1C=m$, $A_1B=n$.

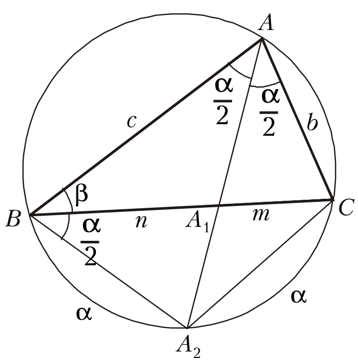

Рис. 12

Решение. а) В точке A_1 пересекаются хорды AA_2 и BC. С учетом теоремы о вписанном угле имеем две пары подобных треугольников (по двум углам) – это треугольники AA_1B и CA_1A_2, а также AA_1C и BA_1A_2. Каждое из указанных подобий дает известное свойство отрезков хорд: $AA_1\cdot A_1A_2=BA_1\cdot A_1C$, откуда

$$l_ax=mn\,, \qquad (*)$$

где $x=A_1A_2$. Поскольку

$$\angle BAA_2=\angle CAA_2=\angle CBA_2=\angle BCA_2=\frac{\alpha}{2}\,,$$

где $\alpha=\angle BAC$, получаем, что

$$\triangle AA_2B\sim\triangle ACA_1\sim\triangle BA_2A_1\,,$$

а также

$$\triangle AA_2C\sim\triangle ABA_1\sim\triangle CA_2A_1\,.$$

Из доказанных подобий следует, что, например,

$$\angle AA_1C=\angle ABA_2\,.$$

Иначе равенство этих же углов можно доказать непосредственно вычислением:

$$\angle AA_1C=\frac{\alpha}{2}+\beta-\text{ как внешний угол для }\triangle ABA_1\,,$$

$$\angle ABA_2=\frac{\alpha}{2}+\beta-\text{ как угол в }\triangle ABA_2\,.$$

Значит,

$$\angle AA_1C=\angle ABA_2\,.$$

Аналогичными способами можно доказать равенство

$$\angle AA_1B=\angle ACA_2\,.$$

б) Из подобия $\triangle AA_2B$ и $\triangle ACA_1$ имеем

$$\frac{AA_2}{AC}=\frac{AB}{AA_1}\Leftrightarrow\frac{l_a+x}{b}=\frac{c}{l_a}\Rightarrow l_a^2+l_ax=bc\,,$$

откуда, с учетом $(*)$, находим

$$l_a^2=bc-mn\,.$$

Мы получили важную формулу, позволяющую в некоторых случаях вычислять биссектрису угла треугольника.

Задача 11. *Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, $AB = AD$, CA – биссектриса угла C, $\angle BAD=140^\circ$, $\angle BEA=110^\circ$. Найдите угол CDB.*

Решение. Мы уже встречались со стандартным построением – продолжением биссектрисы треугольника до пересечения с описанной окружностью. В полученном при этом вписанном четырехугольнике (например, четырехугольнике $BCDA$) оказываются равными две вновь полученные стороны ($BA = DA$, так как по теореме о вписанном угле $\angle DBA=\angle BDA=\frac{1}{2}\angle BCD$).

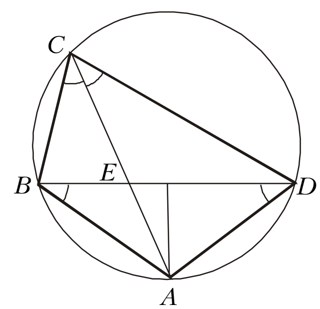

Рис. 13

В данной задаче ситуация обратная. Известно (рис.13), что отрезок CE – биссектриса угла C в $\triangle BCD$; биссектриса CE продолжена так, что в четырехугольнике $BCDA$ равны стороны BA и DA (по условию). Докажем, что четырехугольник $BCDA$ является вписанным. Достаточно убедиться, что описанная около $\triangle BCD$ окружность пройдет через точку A. Действительно, так как $BA = AD$, то $\angle DBA=\angle BDA$. Поэтому середина дуги BmD, как и точка A, лежит на биссектрисе угла BCD и на серединном перпендикуляре к хорде BD. Значит, точка A совпадает с серединой дуги BmD, и четырехугольник $BCDA$ является вписанным.

Во вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°. Поэтому

$$\angle BCD=180^\circ-140^\circ=40^\circ\,,$$

$$\angle ABD=\angle ACD=\frac{1}{2}\angle BCD=\frac{1}{2}\cdot 40^\circ=20^\circ\,,$$

$$\angle CDB=\angle CAB=\angle EAB=$$

$$=180^\circ-(\angle ABD+\angle BEA)=180^\circ-\left(20^\circ+110^\circ\right)=50^\circ\,.$$

Упражнения

13. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, $AB=BC$, DB – биссектриса угла D, $\angle ABC=100^\circ$, $\angle BEA=70^\circ$. Найдите угол CAD.

14 (МГУ, геогр. ф-т, 1994). В треугольнике KMN проведены высота NA, биссектриса NB и медиана NC, которые делят угол KNM на четыре равные части. Найдите высоту NA, биссектрису NB и медиану NC, если радиус описанной около треугольника KMN окружности равен R.

15. Найдите углы треугольника ABC, если его высота и медиана, проведенные из вершины C, делят угол ACB на 3 равные части.