и выразим через них искомую длину $BK = x$:

$$\begin{cases} x = 2R_{ABK}\sin\alpha \\ x = 2R_{BCK}\sin\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{3}\sin\alpha \\ x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\alpha, \end{cases}$$

откуда $\operatorname{ctg}\alpha = 3$, и

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Значит,

$$x = 2\sqrt{3}\,\frac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Задача 7. *Биссектриса DE треугольника ADC продлена до пересечения с описанной окружностью в точке B. а) Известно, что BD = = l и $\angle ADC = \beta$. Найдите площадь четырехугольника ABCD. б) Известны длины отрезков DE = m и BE = n, на которые отрезок BD рассекается другой диагональю AC. Найдите длины отрезков AB и BC.*

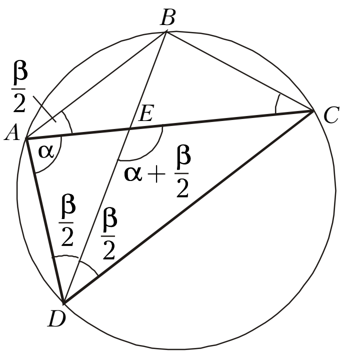

Рис. 9

Решение. а) Для искомой площади S имеем (рис.9)

$$S = \frac{1}{2}BD\cdot AC\cdot\sin\angle DEC =$$

$$= \frac{1}{2}BD\cdot 2R\sin\angle ADC\cdot\sin\angle DEC.$$

Из $\triangle ADE$ и $\triangle ABE$ ясно, что

$$\angle DEC = \alpha + \frac{\beta}{2} = \angle DAB,\ \text{где}\ \alpha = \angle DAE,$$

$$\frac{\beta}{2} = \angle ADE = \angle CDE = \angle BAE = \frac{1}{2}\overset{\cup}{BC}.$$

Поэтому

$$S = \frac{1}{2}BD\left(2R\sin\angle DEC\right)\sin\angle ADC =$$

$$= \frac{1}{2}BD\left(2R\sin\angle DAB\right)\sin\angle ADC =$$

$$= \frac{1}{2}BD\cdot BD\cdot\sin\angle ADC = \frac{1}{2}l^2\sin\beta.$$

б) Ответ вытекает из подобия $\triangle ABE$ и $\triangle DBA$ (по двум углам):

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow AB^2 =$$

$$= BD\cdot BE \Rightarrow \text{AB} =$$

$$= BC = \sqrt{(m+n)n}.$$

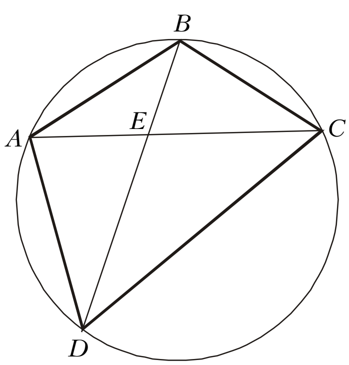

Рис. 10

Задача 8 (МГУ, мехмат, 1997). *Диагонали вписанного в окружность четырехугольника ABCD пересекаются в точке E, причем $\angle ADB = \dfrac{\pi}{8}$, BD = 6 и $AD\cdot CE = DC\cdot AE$. Найдите площадь четырехугольника ABCD.*

Решение. Конфигурация этой задачи (рис.10) напоминает предыдущую. Из условия имеем

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{CE}.$$

В треугольнике ADC отрезок DE рассекает противоположную сторону AC на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Значит, DE – биссектриса в $\triangle ADC$. Докажем это.

Пусть биссектриса DE_1 не совпадает с DE. Тогда по свойству биссектрисы

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE_1}{CE_1},\ \text{или}\ \frac{AE_1}{CE_1} = \frac{AE}{CE},$$

но это значит, что точки E_1 и E совпадают.

Итак, BD – биссектриса. Осталось воспользоваться результатом предыдущей задачи. Так как по условию $BD = l = 6$, $\angle ADC = 2\angle ADB = 2\cdot\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$, то искомая площадь равна

$$S = \frac{1}{2}BD^2\sin\angle ADC = \frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\sin\frac{\pi}{4} = 9\sqrt{2}.$$

Задача 9 (МГУ, мехмат, 1997). *В окружности проведены хорды AC и BD, пересекающиеся в точке E, причем касательная к окружности, проходящая через точку C, параллельна BD. Известно, что AB : BE = = 3 : 1 и $S_{\triangle ADC} = 18$. Найдите площадь треугольника CDE.*

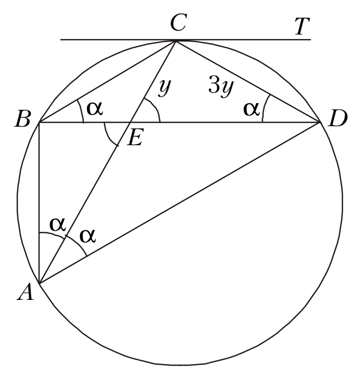

Рис. 11

Решение. Задача сводится к нахождению отношения $CE : AC$. Действительно, высота h_D, проведенная из вершины D, является общей для треугольников CDE и ADC (рис.11). Поэтому

$$\frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}CE\cdot h_D}{\frac{1}{2}AC\cdot h_D} = \frac{CE}{AC}.$$

Касательная CT параллельна BD. Поэтому $BC = DC$, $\overset{\cup}{BC} = \overset{\cup}{DC}$. Обозначим $\angle CBD = \angle CDB = \alpha$. По теореме о вписанном угле,

$$\angle BAC = \frac{1}{2}\overset{\cup}{BC} = \angle BDC = \alpha,$$

$$\angle DAC = \frac{1}{2}\overset{\cup}{CD} = \angle CBD = \alpha,$$

т.е. хорда AC является биссектрисой угла BAD.

Имеем стандартную конфигурацию: биссектриса AE в $\triangle ABD$ продолжена до пересечения с описанной (около $\triangle ABD$) окружностью, т.е. во вписанном четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла. Рассмотрим две пары подобных треугольников. Во-первых, $\triangle BAE \sim \triangle CDE$ по двум углам: $\angle BAE = \angle CDE = \alpha$, $\angle BEA = \angle DEC$. Поэтому $BE : BA = CE : CD = 1 : 3$. Пусть $CE = y$, тогда $CD = 3y$. Кроме того, $\triangle CDE \sim \triangle CAD$ по двум углам: $\angle CDE = \angle CAD = \alpha$, а угол при вершине C – общий.