прямоугольных треугольников, имеющих общие гипотенузы, а значит, и одинаковые коэффициенты подобия. Действительно, вписанные углы ABE и ADE опираются на дугу AE и потому равны, значит, треугольники BA_1E и DD_1E подобны с коэффициентом $k = \dfrac{BE}{DE} = \dfrac{a}{x}$.

Далее, углы B_1BE и C_1DE равны, так как дополняют один и тот же угол CDE до 180° (по свойству вписанного четырехугольника $ABCD$), значит, треугольники BB_1E и DC_1E тоже подобны с тем же коэффициентом $k = \dfrac{BE}{DE} = \dfrac{b}{c}$.

Окончательно имеем

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{c} \Rightarrow ac = bx .$$

Искомое расстояние равно $x = \dfrac{ac}{b}$.

Упражнение 8 (МГУ, физфак, 1971). В окружность вписана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). На дуге CD, не содержащей вершин A и B, взята точка S. Точки P, Q, M и N являются основаниями перпендикуляров, опущенных из S на прямые CD, AB, AD и BC соответственно. Известно, что $SM = a$, $SN = b$, $SP = c$. Найдите отношение площадей треугольников MQS и MPS.

Задача 5 (МГУ, геогр. ф-т, 1989). *В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Известно, что $AD = 2$, $\angle ABD = \angle ACD = 90°$ и расстояние между точкой пересечения биссектрис треугольника ABD и точкой пересечения биссектрис треугольника ACD равно $\sqrt{2}$. Найдите длину стороны BC.*

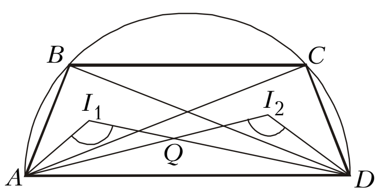

Рис. 7

Решение. Из точек B и C отрезок AD виден под одним и тем же (прямым) углом. Значит, четырехугольник $ABCD$ является вписанным в окружность с диаметром $AD = 2$ (рис.7), причем

$$BC = 2R \sin \angle BAC , \text{ где } R = \frac{1}{2} AD = 1 .$$

Задача, следовательно, сводится к отысканию угла BAC.

Если из точки B окружности отрезок AD виден под углом φ, то из центра I_1 вписанной в $\triangle ABD$ окружности отрезок AD виден под углом $\dfrac{\pi + \varphi}{2}$ (см. задачу 1). Так как $\angle ABD = \angle ACD = \dfrac{\pi}{2}$, I_1 и I_2 − центры вписанных в $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ окружностей, то

$$\angle AI_1D = \angle AI_2D = \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} .$$

Значит, четырехугольник AI_1I_2D тоже является вписанным в окружность. Ее радиус

$$R_1 = \frac{AD}{2 \sin \angle AI_1D} = \frac{2}{2 \sin \frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2} .$$

Так как $I_1I_2 = 2R_1 \sin \angle I_1AI_2$, то

$$\sin \angle I_1AI_2 = \frac{I_1I_2}{2R_1} = \frac{1}{2} .$$

Аналогично,

$$\sin \angle I_1DI_2 = \frac{1}{2} .$$

Вписанные углы I_1AI_2 и I_1DI_2 − острые, так как каждый из подобных треугольников I_1QA и I_2QD (где $Q = AI_2 \cap DI_1$) уже имеет тупой угол. Значит,

$$\angle I_1AI_2 = \angle I_1DI_2 = \frac{\pi}{6} .$$

Докажем, что $\angle BAC = 2\angle I_1AI_2 = 2\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$. Действительно, угол BAC есть разность двух углов BAD и CAD ($\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD$), а угол I_1AI_2 образован биссектрисами последних. Но тогда

$$\angle I_1AI_2 = \angle I_1AD - \angle I_2AD = \frac{1}{2}\angle BAD - \frac{1}{2}\angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC ,$$

откуда

$$\angle BAC = \frac{\pi}{3} , \text{ а } BC = \sqrt{3} .$$

Упражнения

9. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC, $AD = 7$, $BC = 3$, $\angle ACD = 60°$. Известно, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности и перпендикуляр, проведенный из точки A к стороне CD, делит угол BAD пополам. Найдите длину диагонали AC.

10. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ проведены диагонали KM и LN. Известно, что $\angle KLM = \angle KMN = 60°$, $LM = \sqrt{3}$ и расстояние между точкой пересечения биссектрис треугольника KLN и точкой пересечения биссектрис треугольника KMN равно 1. Найдите длину стороны KN.

11 (МГУ, геогр. ф-т, 1986). Внутри треугольника ABC взята точка K. Известно, что длина стороны BC равна 1, длина стороны AB равна $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, а величины углов ABC, AKB и CKB равны 30°, 120° и 120° соответственно. Найдите длину отрезка BK.

Задача 6 (МГУ, геогр. ф-т, 1986). *В выпуклом четырехугольнике $ABKC$ длина стороны AB равна $\sqrt{3}$, длина диагонали BC равна 1, а величины углов ABC, BKA и BKC равны 120°, 30° и 60° соответственно. Найдите длину стороны BK.*

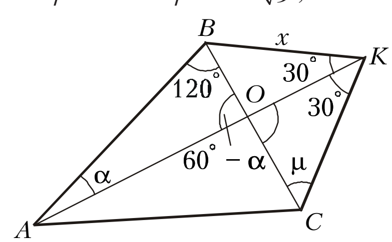

Рис. 8

Решение. Отрезок BK виден из точек A и C под углами $\angle BAK = \alpha$ и $\angle BCK = \mu$ соответственно (рис.8). Из треугольников AOB и KOC получаем

$$\angle AOB = \angle COK = 180° - \angle ABO - \angle BAK =$$
$$= 180° - 120° - \alpha = 60° - \alpha ,$$

$$\mu = 180° - \angle COK - \angle OKC =$$
$$= 180° - \left(60° - \alpha\right) - \left(60° - 30°\right) = 90° + \alpha .$$

Найдем радиусы описанных около $\triangle ABK$ и $\triangle CBK$ окружностей:

$$R_{ABK} = \frac{AB}{2 \sin \angle AKB} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin 30°} = \sqrt{3} ,$$

$$R_{BCK} = \frac{BC}{2 \sin \angle BKC} = \frac{1}{2 \sin 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$