

получаем

$$R_{BHC} = \frac{BC}{2 \sin(\pi - \alpha)} = \frac{a}{2 \sin \alpha} = R.$$

Для отыскания AH заметим, что точки A, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности с диаметром AH (см. рис.3). По теореме синусов, $C_1B_1 = AH \sin \alpha$. Найдем отрезок B_1C_1 . Для этого заметим, что треугольник B_1AC_1 подобен треугольнику ABC , ибо из прямоугольных треугольников BB_1A и CC_1A получаем

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = \cos \alpha$$

(или $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ при $\alpha > \frac{\pi}{2}$). Поэтому треугольники B_1AC_1 и ABC подобны с коэффициентом $|\cos \alpha|$. Но тогда

$$B_1C_1 = a |\cos \alpha|$$

и

$$AH = a |\operatorname{ctg} \alpha|.$$

Упражнения

1. Из точек A и A_1 , лежащих по одну сторону от прямой BC , отрезок BC виден под одним и тем же углом $\alpha \neq 0$. Докажите, что около четырехугольника BA_1A_1C можно описать окружность.
2. Из точек A и A' , лежащих по разные стороны от прямой BC , отрезок BC виден под углами α и $180^\circ - \alpha$ соответственно. Докажите, что около четырехугольника $BACA'$ можно описать окружность.
3. Докажите, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180° .
4. Докажите, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда $AB + CD = AD + BC$.
5. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AB_1C_1 (см. задачу 1).

Задача 2 (МГУ, мехмат, 1972). В треугольнике KLM угол L тупой, а длина стороны KM равна 6. Найдите радиус описанной около треугольника KLM окружности, если известно, что на этой окружности лежит центр окружности высот, проходящий через вершины K, M и точку пересечения высот треугольника KLM .

Решение. Обозначим через H ортоцентр треугольника KLM , через O – центр окружности, проходящей через точки K, M, H (рис.4). По условию угол L тупой. Поэтому точка H лежит вне $\triangle KLM$, точка L является точкой пересечения

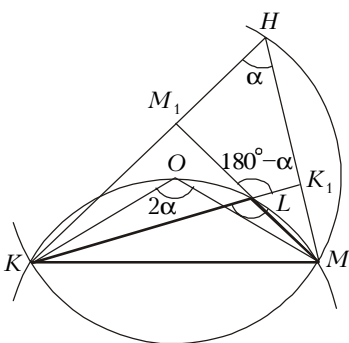


Рис. 4

высот в $\triangle KHM$ и лежит внутри $\triangle KHM$, а треугольник KHM – остроугольный (его углы при вершинах K, H, M являются острыми углами прямоугольных треугольников MKM_1, MHM_1, KMK_1 соответственно). Пусть $\angle KHM = \alpha$. Тогда центральный угол KOM равен 2α . Из точек O и L окружности KLM хорда KM видна под одним и тем же углом: $\angle KLM = \angle KOM = 2\alpha$. Но $\angle KLM = \angle K_1LM_1 = 180^\circ - \alpha$, так как в четырехугольнике LK_1HM_1 углы при вершинах K_1 и M_1 прямые. Поэтому $2\alpha = 180^\circ - \alpha$, т.е. $\alpha = 60^\circ$, $\angle KLM =$

$= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, и по теореме синусов искомый радиус равен

$$R_{KLM} = \frac{KM}{2 \sin \angle KLM} = \frac{6}{2 \sin 120^\circ} = 2\sqrt{3}.$$

Упражнение 6. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , равен 1. Известно, что на этой окружности лежит центр окружности, проходящей через вершины A, C и точку пересечения высот треугольника ABC . Найдите длину стороны AC .

Задача 3 (МГУ, биофак, 1990). Из точки M на окружности проведены три хорды: $MN = 1, MP = 6, MQ = 2$. При этом углы $\angle NMP$ и $\angle PMQ$ равны. Найдите радиус окружности.

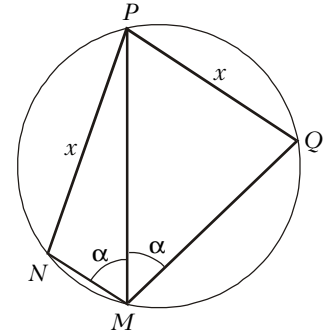


Рис. 5

Решение. Пусть R – искомый радиус, $\angle NMP = \angle QMP = \alpha$, $NP = x$ (рис. 5). Тогда $PQ = 2R \sin \alpha = x$ (в окружности против равных вписанных углов лежат равные хорды). Теорема косинусов для $\triangle MPN$ и $\triangle MPQ$ дает систему относительно x и $\cos \alpha$:

$$\begin{cases} x^2 = 1^2 + 6^2 - 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot \cos \alpha, \\ x^2 = 2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \cos \alpha, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x = \sqrt{34}, \\ \cos \alpha = \frac{1}{4}, \end{cases}$$

а

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Значит,

$$R = \frac{x}{2 \sin \alpha} = 2\sqrt{\frac{34}{15}}.$$

Упражнение 7. Через вершину угла A проведена окружность, пересекающая стороны угла в точках M и N . Биссектриса этого угла пересекает окружность в точке P . Найдите радиус окружности, если $AM = 1, AN = 2, AP = 4$.

Задача 4 (МГУ, физфак, 1971). Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от вершины E до прямых AB, BC и CD равны a, b и c соответственно. Найдите расстояние от вершины E до диагонали AD .

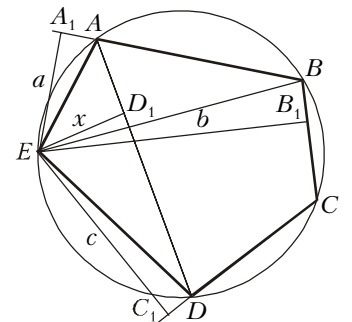


Рис. 6

Решение. Докажем следующее свойство точки E окружности (рис.6):

Если $A_1E = a, B_1E = b, C_1E = c, D_1E = x$ – соответственно, расстояния от точки E окружности до прямых AB, BC, CD, AD , образующих вписанный четырехугольник $ABCD$, то

$$ac = bx.$$

Доказательство вытекает из наличия двух пар подобных