

Иногда прибегают к такой записи:

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + \dots,$$

имея в виду, что в написанной сумме все слагаемые, начиная с некоторого места, равны нулю.

Упражнения

- 16. а) При каких натуральных n число $n!$ делится на 2^n ?
 - б) Существует ли такое k , что $n!$ делится 2^{n-k} при всех n ?
 - в) Пусть $p > 2$ – простое число. Существует ли такое k , что $n!$ делится на p^{n-k} при всех n ?
 - 17. На какую степень двойки делится число $(n+1)(n+2)\dots(2n)$?
 - 18. Докажите, что $(n)!$ делится на $(n!)^{(n-1)!}$.
 - 19. На какую степень простого числа p делится число
- а) $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)$; б) $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$?

Подсчет количества целых точек

Начнем с совсем простого вопроса. Сколько целых чисел содержится в интервале $(\alpha; \beta)$? Ясно, что если целое число m удовлетворяет неравенствам $\alpha < m < \beta$, то $\lfloor \alpha \rfloor + 1 \leq m < \lfloor \beta \rfloor$, но таких чисел имеется в точности $\lfloor \beta \rfloor - \lfloor \alpha \rfloor$. Это так же легко понять, как и то, что между 1 и 10 мая ровно 8 дней.

Аналогичный вопрос. Сколько чисел, кратных данному $x > 0$ (т.е. чисел вида nx , где n – целое число), содержится в промежутке $(\alpha; \beta)$? Ответ очевиден – таких чисел ровно $\lfloor \frac{\beta}{x} \rfloor - \lfloor \frac{\alpha}{x} \rfloor$.

Теперь решим задачу.

Задача 8. Докажите, что если $x > 0$ и n натуральное, то

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor.$$

Решение. Рассмотрим натуральные числа, меньшие x и делящиеся на n . Таких чисел ровно $\lfloor \frac{x}{n} \rfloor$. Но те же самые числа образуют множество чисел, не превосходящих $\lfloor x \rfloor$ и делящихся на n . Отсюда и следует доказываемое равенство.

Упражнение 20. Найдите количество натуральных чисел, меньших x и делящихся на 2 или на 3.

Следующая важная для теории чисел задача решается с помощью подсчета числа целых точек на плоскости.

Задача 9. Пусть p и q – взаимно простые целые числа. Докажите, что

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Решение. Рассмотрим на плоскости xOy точки $(x; y)$ с целыми координатами, такие, что $1 \leq x \leq q-1$, $1 \leq y \leq p-1$, т.е. точки, лежащие внутри прямоугольника $OABC$ (рис.5). Всего имеется $(p-1)(q-1)$ таких точек. Заметим, что на диагонали OB этого прямоугольника нет точек с целыми координатами, кроме точек O и B . (В самом деле, прямая OB имеет уравнение $y = \frac{p}{q}x$. Если целая точка $(m; n)$ лежит на OB , причем $1 < m < q$, то $\frac{n}{m} = \frac{p}{q}$, т.е. $qn = mp$. Но так как q и p взаимно просты, то n делится на p , а m делится на q , т.е. $m \geq q$, $n \geq p$. Противоречие.) Поэтому в треугольнике OBC содержится ровно половина рассматриваемых целых точек, т.е. $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$.

Подсчитаем теперь это же количество другим способом.

При $x = k$ (k – натуральное число) на отрезке KL лежат $\lfloor \frac{p}{q}k \rfloor$ точек с целыми координатами. Таким образом, их общее количество равно сумме

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor$$

что и доказывает равенство из условия задачи.

Точно так же доказывается, что

$$\left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2q}{p} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(p-1)q}{p} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Разберем еще один пример. Обозначим через $\tau(n)$ количество делителей натурального числа n , и решим такую задачу.

Задача 10. Докажите, что

$$\tau(1) + \tau(2) + \dots + \tau(n) = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor.$$

Решение. Количество чисел из множества $1, 2, \dots, n$, делящихся на некоторое число k , равно $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ (это числа $k, 2k, \dots, \lfloor \frac{n}{k} \rfloor k$). Сумма $\lfloor \frac{n}{1} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{n}{n} \rfloor$ равна количеству чисел, делящихся на 1, плюс количество чисел, делящихся на 2, ..., плюс количество чисел, делящихся на n . Но ведь это и есть сумма $\tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \dots + \tau(n)$.

Этот результат тем более интересен, что количество делителей натурального n выражается через n весьма непросто. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, где p_1, p_2, \dots, p_k – простые числа. Тогда $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$. Для доказательства достаточно заметить, что всякий делитель d числа n имеет разложение вида $d = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$, где $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, т.е. однозначно определяется набором чисел $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$. Но всего таких наборов существует $(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \alpha_k + 1)$.

Отметим еще одно полезное соотношение.

Задача 11. Пусть $\sigma(n)$ – сумма всех делителей числа n . Тогда

$$\sigma(1) + \sigma(2) + \dots + \sigma(n) = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + n \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor.$$

Решение. Число 1 – делитель всех чисел, поэтому $\lfloor \frac{n}{1} \rfloor = n$ – сумма всех единиц. На 2 делится $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ чисел, так что $2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ есть сумма всех двоек – делителей чисел от 1 до n . Вообще, $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ – количество чисел, не больших n и делящихся на k . Поэтому $k \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ – это сумма всех делителей, равных k . Следовательно, сумма по k всех чисел вида $k \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ есть в точности левая часть доказываемого равенства.

Упражнение 21. Докажите, что

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

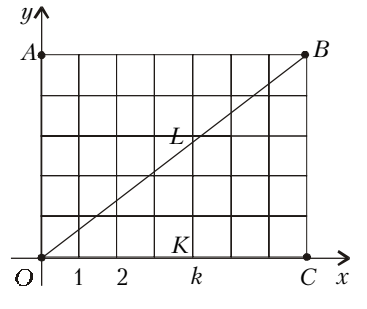


Рис. 5