Отсюда следует, что

$$\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right]=2A-1-\text{ нечетное число},$$

а

$$\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right\}=1-\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}.$$

Оценим степень в правой части полученного равенства:

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}=\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}}=\frac{1}{\left(7+2\sqrt{3}\right)^{1001}}<\frac{1}{10^{1001}}.$$

Поэтому $\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right\}>0,\underbrace{9\ldots9}_{1001}$.

В следующей задаче целая часть находит довольно неожиданное применение.

Задача 6. *Рассмотрим последовательность*

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ \ldots$$

(последовательно выписаны единица, две двойки, три тройки, четыре четверки, пять пятерок и т.д.). Какое число стоит на месте с номером а) 2002; б) n?

Решение. Пусть $x_n=k$ – член заданной последовательности с номером n. До первого появления числа k выписано $1+2+3+\ldots+k-1=\frac{k(k-1)}{2}$ чисел. А последнее число k стоит на месте с номером $\frac{k(k+1)}{2}$. Поэтому

$$\frac{k(k-1)}{2}<n\le\frac{k(k+1)}{2},$$

откуда

$$k^2-k<2n\le k^2+k.$$

Заметим, что к левой и правой частям последнего неравенства можно прибавить по $\frac{1}{4}$, так что

$$k^2-k+\frac{1}{4}<2n<k^2+k+\frac{1}{4},$$

т.е.

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)^2<2n<\left(k+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Тогда

$$k-\frac{1}{2}<\sqrt{2n}<k+\frac{1}{2},$$

откуда

$$k<\sqrt{2n}+\frac{1}{2}<k+1.$$

Следовательно,

$$x_n=\left[\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\right].$$

Мы получили формулу, позволяющую вычислить n-й член исходной последовательности. В частности, $x_{2002}=63$.

Упражнения

12. Решите уравнение $[x]^2=\left[x^2\right]$.

13. Найдите наименьшее положительное x, для которого $[x]\cdot\{x\}\ge3$.

14. а) Докажите, что $\left[\sqrt{[x]}\right]=\left[\sqrt{x}\right]$ при всех $x\ge0$.

б) При каких $a>1$ равенство $\left[\log_a[x]\right]=\left[\log_a x\right]$ выполняется при всех $x>0$?

15. Докажите, что $\left\{\left(5+\sqrt{26}\right)^n\right\}<\frac{1}{10^n}$ при любом натуральном n.

Целая часть и деление с остатком

Разделим с остатком натуральное число a на натуральное число b, т.е. запишем a в виде

$$a=kb+r,$$

где частное k – целое неотрицательное число, а остаток $0\le r\le b-1$. Перепишем равенство так:

$$\frac{a}{b}=k+\frac{r}{b}.$$

По определению целой и дробной частей,

$$k=\left[\frac{a}{b}\right],\ \frac{r}{b}=\left\{\frac{a}{b}\right\},$$

так что

$$a=\left[\frac{a}{b}\right]b+b\left\{\frac{a}{b}\right\}.$$

Мы сумели выразить частное и остаток через целую и дробную части числа $\frac{a}{b}$.

А теперь давайте выясним, сколько существует натуральных чисел, меньших данного числа x (не обязательно целого) и делящихся на данное натуральное число n.

Ясно, что если $n>x$, то таких чисел нет. Если же $kn\le x<(k+1)n$, то это числа n, $2n$, …, kn. Их ровно k штук. А так как

$$k\le\frac{x}{n}<k+1,$$

то $k=\left[\frac{x}{n}\right]$.

Это простое замечание позволит нам получить одну важную для теории чисел формулу. Но сначала решим такую задачу.

Задача 7. *На какую степень двойки делится 100!?*

Решение. По доказанному ранее, среди чисел 1, 2, …, 100 имеется

$$\frac{100}{2}=50\ \text{четных чисел},$$

$$\frac{100}{4}=25\ \text{чисел, делящихся на 4},$$

$$\left[\frac{100}{8}\right]=12\ \text{чисел, делящихся на 8},$$

$$\left[\frac{100}{16}\right]=6\ \text{чисел, делящихся на 16},$$

$$\left[\frac{100}{32}\right]=3\ \text{числа, делящихся на 32},$$

$$\left[\frac{100}{64}\right]=1\ \text{число, делящееся на 64}.$$

Отсюда следует, что всего в произведение 100! входит 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97 двоек, т.е. 100! делится на 2^{97} и не делится на 2^{98}.

Ответ. 97.

Аналогично, при любом n и простом p есть $\left[\frac{n}{p}\right]$ чисел, делящиеся на p, $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ – делящихся на p^2, $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ – делящихся на p^k. Если $p^m\le n<p^{m+1}$, то показатель степени, в которой число p входит в разложение $n!$ на простые множители, равен

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^m}\right].$$