11. Изобразите на плоскости xOy точки, для которых

а) $\{x\} = \{y\}$; б) $\{x\} + \{y\} < 1$.

Несколько задач

Уравнения, неравенства и другие задачи про целые и дробные части числа довольно часто встречаются на математических олимпиадах разных уровней. Разберем несколько характерных примеров.

Задача 1 (II Соросовская олимпиада). *Решите уравнение*

$$x^2 - 10[x] + 9 = 0 .$$

Решение. Пусть $[x] = k$. Прежде всего, ясно, что $k \geq 0$. Поскольку $x \geq k$, получаем при $x \geq 0$ неравенство

$$x^2 - 10x + 9 \leq 0 .$$

Отсюда следует, что $1 \leq x \leq 9$, но тогда и $1 \leq k \leq 9$, причем $x^2 + 9$ – целое число, делящееся на 10. Проверка показывает, что годятся значения x = 1, $x = \sqrt{61}$, $x = \sqrt{71}$, x = 9.

Ответ. 1; $\sqrt{61}$; $\sqrt{71}$; 9.

Задача 2. *Решите уравнение*

$$\left[\frac{2x+1}{3}\right] = [x] .$$

Решение. Пусть $[x] = k$. Тогда

$$\begin{cases} k \leq \dfrac{2x+1}{3} < k+1, \\ k \leq x < k+1. \end{cases}$$

Запишем эквивалентную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{3k-1}{2} \leq x < \dfrac{3k+2}{2}, \\ k \leq x < k+1, \end{cases} \qquad (*)$$

откуда следует, что k обязано удовлетворять неравенствам

$$\frac{3k-1}{2} < k+1 , \quad k < \frac{3k+2}{2} ,$$

т.е. $-2 < k < 3$.

Итак, возможны следующие значения k: –1; 0; 1; 2. Подставляя последовательно эти значения в систему ($*$) и решая полученные неравенства, находим ответ.

Ответ. $-1 \leq x < -\frac{1}{2}$; $0 \leq x < 2$; $\frac{5}{2} \leq x < 3$.

Замечание. Можно было решить эту задачу и иначе. Построив графики левой и правой частей исходного уравнения, обнаружим, что они совпадают на промежутках, указанных в ответе.

Задача 3. *Решите уравнение*

$$\left[x^2\right] = 2[x] .$$

Решение. Пусть $[x] = k$, $\{x\} = \alpha$. Тогда $k \geq 0$, $\alpha \geq 0$ и

$$\left[(k+\alpha)^2\right] = 2[k+\alpha] ,$$

после чего приходим к уравнению

$$\left[2k\alpha + \alpha^2\right] = 2k - k^2 .$$

Поскольку левая часть уравнения неотрицательна, а k – целое число, то $2k - k^2 \geq 0$, и возможны три значения k – это 0, 1 и 2.

При k = 0 получим $\left[\alpha^2\right] = 0$, что выполняется при всех $0 \leq \alpha < 1$. Отсюда $0 \leq x < 1$.

При k = 1 приходим к уравнению

$$\left[2\alpha + \alpha^2\right] = 1 ,$$

что дает систему $1 \leq 2\alpha + \alpha^2 < 2$, $0 \leq \alpha < 1$, откуда $\sqrt{2} - 1 \leq \alpha < 1$, т.е. $\sqrt{2} \leq x < 2$.

Наконец, при k = 2 имеем уравнение

$$\left[4\alpha + \alpha^2\right] = 0 ,$$

равносильное системе $0 \leq 4\alpha + \alpha^2 < 1$, $0 \leq \alpha < 1$. Ее решение – промежуток $0 \leq \alpha < \sqrt{5} - 2$, откуда $2 \leq x < \sqrt{5}$.

Объединяя полученные промежутки, запишем ответ.

Ответ. $0 \leq x < 1$, $\sqrt{2} \leq x < \sqrt{5}$.

Задача 4 (V Соросовская олимпиада). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 3,9, \\ y + [z] + \{x\} = 3,5, \\ z + [x] + \{y\} = 2. \end{cases}$$

Решение. Пусть $a = [x]$, $\alpha = \{x\}$, $b = [y]$, $\beta = \{y\}$, $c = [z]$, $\gamma = \{z\}$, где a, b, c – целые числа, $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 1$, $0 \leq \gamma < 1$. В этих обозначениях система имеет вид

$$\begin{cases} a + \alpha + b + \gamma = 3,9, \\ b + \beta + c + \alpha = 3,5, \\ c + \gamma + a + \beta = 2. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получим

$$2(a + b + c + \alpha + \beta + \gamma) = 9,4 ,$$

т.е.

$$a + b + c + \alpha + \beta + \gamma = 4,7 .$$

Вычитая из полученного уравнения последовательно первое, второе и третье уравнения системы, имеем

$$\begin{cases} c + \beta = 0,8, \\ a + \gamma = 1,2, \\ b + \alpha = 2,7, \end{cases}$$

откуда следует, что c = 0, $\beta = 0,8$, a = 1, $\gamma = 0,2$, b = 2, $\alpha = 0,7$.

Ответ. x = 1,7; y = 2,8; z = 0,2.

Вот еще одна задача о поведении целых и дробных частей чисел вида ξ^n, где ξ – корень некоторого квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

Задача 5. *Докажите, что а)* $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right]$ *– нечетное число; б)* $\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right\} > 0,\underbrace{9\ldots9}_{1001}$.

Решение. Раскрывая скобки в выражении $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}$, получим

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002} = A + B\sqrt{3} ,$$

где A и B – натуральные числа, причем

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002} = A - B\sqrt{3} = \frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}} .$$

Но тогда

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2002} = 2A .$$

Далее,

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002} = 2A - 1 + 1 - \left(2-\sqrt{3}\right)^{2002} .$$