11. Изобразите на плоскости xOy точки, для которых

а) $\{x\}=\{y\}$; б) $\{x\}+\{y\}<1$.

Несколько задач

Уравнения, неравенства и другие задачи про целые и дробные части числа довольно часто встречаются на математических олимпиадах разных уровней. Разберем несколько характерных примеров.

Задача 1 (II Соросовская олимпиада). *Решите уравнение*

$$x^2-10[x]+9=0.$$

Решение. Пусть $[x]=k$. Прежде всего, ясно, что $k\ge 0$. Поскольку $x\ge k$, получаем при $x\ge 0$ неравенство

$$x^2-10x+9\le 0.$$

Отсюда следует, что $1\le x\le 9$, но тогда и $1\le k\le 9$, причем x^2+9 – целое число, делящееся на 10. Проверка показывает, что годятся значения $x=1$, $x=\sqrt{61}$, $x=\sqrt{71}$, $x=9$.

Ответ. 1; $\sqrt{61}$; $\sqrt{71}$; 9.

Задача 2. *Решите уравнение*

$$\left[\frac{2x+1}{3}\right]=[x].$$

Решение. Пусть $[x]=k$. Тогда

$$\begin{cases} k\le \dfrac{2x+1}{3}<k+1,\\ k\le x<k+1.\end{cases}$$

Запишем эквивалентную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{3k-1}{2}\le x<\dfrac{3k+2}{2},\\ k\le x<k+1,\end{cases} \qquad (*)$$

откуда следует, что k обязано удовлетворять неравенствам

$$\frac{3k-1}{2}<k+1,\ k<\frac{3k+2}{2},$$

т.е. $-2<k<3$.

Итак, возможны следующие значения k: -1; 0; 1; 2. Подставляя последовательно эти значения в систему $(*)$ и решая полученные неравенства, находим ответ.

Ответ. $-1\le x<-\frac{1}{2}$; $0\le x<2$; $\frac{5}{2}\le x<3$.

Замечание. Можно было решить эту задачу и иначе. Построив графики левой и правой частей исходного уравнения, обнаружим, что они совпадают на промежутках, указанных в ответе.

Задача 3. *Решите уравнение*

$$\left[x^2\right]=2[x].$$

Решение. Пусть $[x]=k$, $\{x\}=\alpha$. Тогда $k\ge 0$, $\alpha\ge 0$ и

$$\left[(k+\alpha)^2\right]=2[k+\alpha],$$

после чего приходим к уравнению

$$\left[2k\alpha+\alpha^2\right]=2k-k^2.$$

Поскольку левая часть уравнения неотрицательна, а k – целое число, то $2k-k^2\ge 0$, и возможны три значения k – это 0, 1 и 2.

При $k=0$ получим $\left[\alpha^2\right]=0$, что выполняется при всех $0\le\alpha<1$. Отсюда $0\le x<1$.

При $k=1$ приходим к уравнению

$$\left[2\alpha+\alpha^2\right]=1,$$

что дает систему $1\le 2\alpha+\alpha^2<2$, $0\le\alpha<1$, откуда $\sqrt{2}-1\le\alpha<1$, т.е. $\sqrt{2}\le x<2$.

Наконец, при $k=2$ имеем уравнение

$$\left[4\alpha+\alpha^2\right]=0,$$

равносильное системе $0\le 4\alpha+\alpha^2<1$, $0\le\alpha<1$. Ее решение – промежуток $0\le\alpha<\sqrt{5}-2$, откуда $2\le x<\sqrt{5}$.

Объединяя полученные промежутки, запишем ответ.

Ответ. $0\le x<1$, $\sqrt{2}\le x<\sqrt{5}$.

Задача 4 (V Соросовская олимпиада). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=3{,}9,\\ y+[z]+\{x\}=3{,}5,\\ z+[x]+\{y\}=2.\end{cases}$$

Решение. Пусть $a=[x]$, $\alpha=\{x\}$, $b=[y]$, $\beta=\{y\}$, $c=[z]$, $\gamma=\{z\}$, где a, b, c – целые числа, $0\le\alpha<1$, $0\le\beta<1$, $0\le\gamma<1$. В этих обозначениях система имеет вид

$$\begin{cases} a+\alpha+b+\gamma=3{,}9,\\ b+\beta+c+\alpha=3{,}5,\\ c+\gamma+a+\beta=2.\end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получим

$$2(a+b+c+\alpha+\beta+\gamma)=9{,}4,$$

т.е.

$$a+b+c+\alpha+\beta+\gamma=4{,}7.$$

Вычитая из полученного уравнения последовательно первое, второе и третье уравнения системы, имеем

$$\begin{cases} c+\beta=0{,}8,\\ a+\gamma=1{,}2,\\ b+\alpha=2{,}7,\end{cases}$$

откуда следует, что $c=0$, $\beta=0{,}8$, $a=1$, $\gamma=0{,}2$, $b=2$, $\alpha=0{,}7$.

Ответ. $x=1{,}7$; $y=2{,}8$; $z=0{,}2$.

Вот еще одна задача о поведении целых и дробных частей чисел вида ξ^n, где ξ – корень некоторого квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

Задача 5. *Докажите, что а)* $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right]$ *– нечетное число; б)* $\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right\}>0{,}\underbrace{9\ldots9}_{1001}$.

Решение. Раскрывая скобки в выражении $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}$, получим

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}=A+B\sqrt{3},$$

где A и B – натуральные числа, причем

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}=A-B\sqrt{3}=\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}}.$$

Но тогда

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}=2A.$$

Далее,

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}=2A-1+1-\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}.$$