Целая и дробная части числа

А.ЕГОРОВ

Упомянутые в заглавии функции довольно часто встречаются в самых разных областях математики – в частности, в алгебре, анализе, теории чисел, комбинаторике. Об этих и родственных им функциях, а также о задачах, с их помощью решаемых, мы и поговорим.

Целая часть числа и ее родственники

Целой частью $[x]$ *числа* x *называется наибольшее целое число, не превосходящее* x.

Например, $[-1{,}5]=-2$, $[-1]=-1$, $[0]=0$, $[1{,}5]=1$, $[\pi]=3$. Вообще, в силу определения, равенство $[x]=k$ означает, что k – это целое число, такое, что $k \le x < k+1$.

График функции $y=[x]$ (рис.1) состоит из ступенек и как бы образует лестницу, идущую слева направо и снизу вверх, переходящую в себя при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}=(1;1)$.

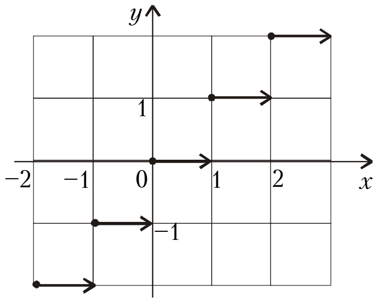

Рис. 1

В литературе также встречается термин «пол числа x» (в противоположность слову «потолок») и его обозначение $\lfloor x \rfloor$. Это то же самое, что и целая часть числа.

Сходным образом определяется функция $\lceil x \rceil$ – потолок числа x. Это *наименьшее целое число, не меньшее* x.

Например, $\lceil -1 \rceil = -1$, $\left\lceil -\frac{1}{2} \right\rceil = 0$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 2{,}5 \rceil = 3$.

График функции $y=\lceil x \rceil$ показан на рисунке 2.

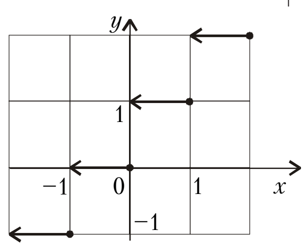

Рис. 2

Упражнения

1. Подумайте, как из графика $y=[x]$ получить график $y=\lceil x \rceil$, и выразите $\lceil x \rceil$ через целую часть.

2. Решите уравнения

а) $\left[\frac{x^2-3x}{2}\right]=1$; б) $\left[\frac{3x-1}{3}\right]=5$.

Отметим некоторые почти очевидные свойства целой части числа:

1) $[x] \le x$; 2) $[x+a]=[x]+a$, где a – произвольное целое число; 3) $[x+y] \ge [x]+[y]$ при любых x и y.

Упражнения

3. Докажите, что если $[x+a]=[x]+[a]$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$, то a – целое число.

4. Постройте графики функций

а) $y=[2x]$; б) $y=[-x]$; в) $y=[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]$.

5. Нарисуйте на плоскости xOy точки, для которых

а) $[x+y]=[x]+[y]$; б) $\left[x^2+y^2\right]=1$; в) $[x]=[y]$.

6. Докажите, что

$$[x]+[y]+[x+y] \le [2x]+[2y] .$$

Наконец, иногда бывает полезна функция $y=(x)$ – ближайшее к x целое число. При этом если ближайших к x целых чисел два (что бывает при $x=\frac{2k+1}{2}$, где k – целое), выбирается большее из них.

Например, $\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, $\left(\frac{1}{2}\right)=1$, $(\pi)=3$, $(0{,}8)=1$.

Нетрудно видеть, что $(x)=\left[x+\frac{1}{2}\right]$.

Упражнение 7. Докажите это и постройте график функции $y=(x)$.

Дробная часть числа

Дробной частью $\{x\}$ *числа* x *называется число* $\{x\}=x-[x]$.

Так, $\{-0{,}3\}=0{,}7$, $\left\{-\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$, $\left\{\sqrt{2}\right\}=\sqrt{2}-1$, $\left\{-2\sqrt{2}\right\}=$ $=2-\sqrt{2}$, $\{1\}=0$.

Отметим некоторые свойства дробной части:

1) равенство $\{x\}=x$ равносильно тому, что $0 \le x < 1$; 2) $\{x\}=\{y\}$ тогда и только тогда, когда $x-y=n$, где n – целое число; в частности, 3) $\{x+1\}=\{x\}$ для любого x.

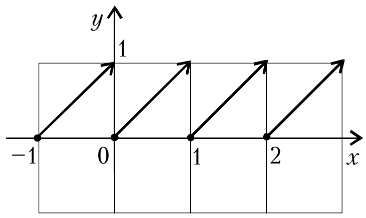

Рис. 3

Таким образом, функция $y=\{x\}$ периодична с периодом 1. График ее показан на рисунке 3 (покосившийся периодический забор).

С дробной частью тесно связана еще одна функция: $y=\{\{x\}\}$ – расстояние от x до ближайшего целого числа. В отличие от дробной части последняя функция непрерывна. Ее график изображен на рисунке 4.

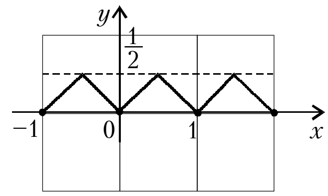

Рис. 4

Упражнения

8. Докажите, что $\{\{x\}\}=\left|\left\{x+\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right|$.

9. Докажите, что $\{k\{x\}\}=\{kx\}$ при любом натуральном k, и решите уравнение $\{3\{x\}\}=x$.

10. Решите уравнения

а) $\{3x\}=\frac{1}{2}$; б) $\{6x\}+\{x\}=1$.