

Физика 9–11

Публикуемая ниже заметка «Поиски минимума в физических задачах» предназначена девятиклассникам, заметка «Снежинки и ледяные узоры на стекле» – десятиклассникам и «Сколько стоит запуск спутника?» – одиннадцатиклассникам.

Поиски минимума в физических задачах

С. СЕРОХВОСТОВ

ГОТОВИЛИСЬ КАК-ТО ДЕВЯТИКЛАССНИКИ САША, КОЛЯ и Петя к районной олимпиаде по физике. Учитель предложил им решить задачу с прошлой олимпиады. Вот ее условие:

Мальчик подошел к последнему вагону электрички в тот момент, когда электричка тронулась и начала двигаться с постоянным ускорением a . Единственная открытая дверь электрички оказалась от мальчика на расстоянии s . Какую наименьшую постоянную скорость должен развить мальчик, чтобы успеть сесть в поезд?

После уроков ребята собрались у Саши дома и стали решать.

– Эта задача решается просто, – сказал Саша. – Давайте выберем систему отсчета так, чтобы начало координат совпало с начальным положением мальчика, а ось X была направлена вдоль платформы. Пусть мальчик бежал со скоростью v и запрыгнул в вагон через время t . Так как мальчик запрыгнул в эту дверь, то можно записать

$$vt = s + \frac{at^2}{2}. \quad (1)$$

Отсюда мы найдем v .

– Подожди, – сказал Коля, – но у нас одно уравнение, а неизвестных величин две: v и t . Поэтому из этого уравнения мы ничего не найдем!

На это Петя возразил:

– Ну хоть что-нибудь мы найти сможем. Например, давайте выразим скорость:

$$v = \frac{s}{t} + \frac{at}{2}. \quad (2)$$

– А еще нам надо учесть, что скорость должна быть минимально возможной, – напомнил Коля.

Старший брат Саши, который учился в десятом классе, в это время проходил мимо комнаты, в которой сидели ребята, и сказал:

– Если минимум, то нужно искать производную!

– А мы еще ее не проходили, – ответил ему Саша. – И потом, наверное, можно и без производной. Нужно просто узнать, при каком t скорость будет минимальна.

– Придумал! – вскрикнул Коля. – Помните, нам на математике говорили, что всегда справедливо соотношение

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

причем равенство будет только при $x = 1$. За x можно обозначить любую величину. Например, можно написать, что

$$v = \sqrt{\frac{as}{2}} \left(\frac{1}{t} \sqrt{\frac{2s}{a}} + t \sqrt{\frac{a}{2s}} \right).$$

Теперь положим

$$x = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{2s}{a}} = 1$$

и получим

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}, \quad v = \sqrt{2as}.$$

– Здорово! – сказал Петя. – Интересно, а можно ли решить другим способом? Давайте рассуждать так. Чем медленнее мальчик будет бежать, тем больше времени он затратит. А при какой-то скорости он вообще не догонит эту дверь. Выразим время из уравнения (1):

$$t = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 2as}}{a}.$$

Смотрите, при $v^2 < 2as$ решения не существует, так как выражение под корнем меньше нуля! Значит, минимально возможная скорость определяется равенством

$$v^2 = 2as,$$

и ответ совпадает с ответом Коли!

Саша после небольшого раздумья сказал:

– А можно еще и третьим способом решить. Давайте построим графики зависимости координат мальчика и двери от времени. В тот момент, когда они пересекутся, мальчик и догонит дверь поезда.

Саша взял карандаш и сделал рисунок.

– Смотрите, чем меньше наклон графика координаты мальчика, тем медленнее он бежит. Наименьшая скорость, при которой он может добежать до двери, соответствует нижней прямой. А она касается графика координаты двери. Это значит, что для такого случая скорости мальчика и двери в момент запрыгивания одинаковы! Скорость двери мы легко найдем:

$$v_d = at,$$

откуда

$$t = \frac{v_d}{a}.$$

Подставим это время в уравнение (1) и получим ответ.

А Сашин брат решил проверить результаты мальчиков – он

