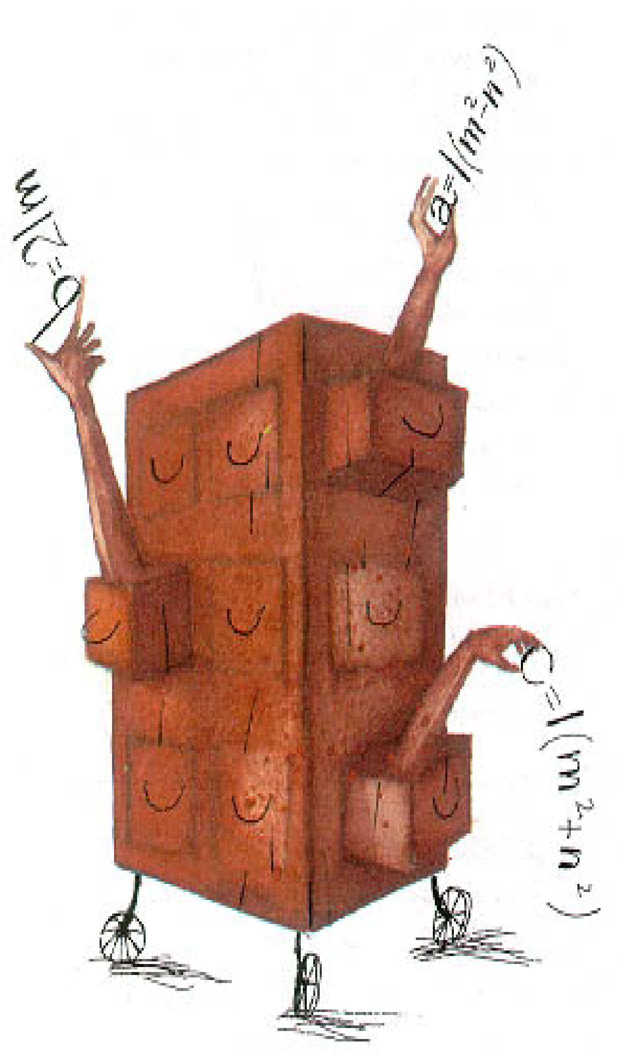
Докажем, что дробь $\dfrac{n^2-m^2}{m^2+2mn}$ несократима.

Предположим, что оба числа n^2-m^2 и $m(m+2n)$ делятся на некоторое простое число p. Рассмотрим множители второго числа. Если m делится на p, то n на p не делится в силу взаимной простоты чисел m и n. Но тогда n^2-m^2 на p не делится, чего не может быть. Следовательно, на p делится число $m+2n$, а число m не делится. В этом случае на p будет делиться

$$4\left(n(m+2n)-\left(n^2-m^2\right)\right)-(m+2n)^2=3m^2.$$

Так как m^2 не делится на p, то на p делится 3. Итак, число p может быть только тройкой: $p=3$.

В самом начале доказательства мы предположили, что $c+a-b$ не делится на 3. Поскольку $\dfrac{m}{n}=\dfrac{b}{c+a}$, то $\dfrac{m}{n-m}=\dfrac{b}{c+a-b}$; отсюда заключаем, что $n-m$ не делится на 3. Но по нашему предположению $n^2-m^2=(n-m)(n+m)$ делится на 3, поэтому на 3 делится число $n+m$, а значит, и число $m(n+m)=mn+m^2=\left(m^2+2mn\right)-mn$. Поскольку по предположению число m^2+2mn делится на 3, отсюда следует, что mn делится на 3, т.е. n делится на 3. Из делимости на 3 разности n^2-m^2 следует, что и m должно делиться на 3, что невозможно. Итак, дробь $\dfrac{n^2-m^2}{m^2+2mn}=\dfrac{a}{b}$ несократима. В силу взаимной простоты чисел a и b отсюда заключаем, что $a=n^2-m^2$, $b=m^2+2mn$ и, следовательно, $c=m^2+mn+n^2$. Теорема доказана.



Заметим, что соотношения (2) были известны уже Диофанту (ок. 250 г.).

Упражнение 1. Докажите, что для любых натуральных m и n $(n>m)$ числа a, b, c, рассчитанные по формулам (2), удовлетворяют равенству (1).

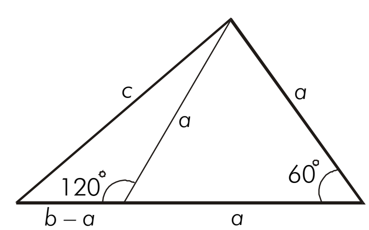
Целочисленные треугольники с углом 60°

Длины сторон a, b, c треугольников с углом 60° удовлетворяют уравнению

$$a^2-ab+b^2=c^2, \qquad (3)$$

получающегося из тех же соображений, что и уравнение (1). Здесь также можно искать натуральные решения уравнения (3), развивая соответствующую теорию. Однако мы поступим более хитрым образом. На сей раз алгебре будет помогать геометрия. Оказывается, всякий треугольник с углом 60° родственен некоторому треугольнику с углом 120°! Вот как устанавливаются эти «родственные узы».

Вначале заметим, что если к углу 60° в треугольнике примыкают две равные стороны $a=b$, то в соответствии с (3) получаем $a=b=c$. Итак, уравнение (3) допускает тривиальное решение $a=b=c=n$, где n – любое натуральное число. Пусть теперь к углу 60° в треугольнике примыкают две различающиеся по длине стороны. Без ограничения общности будем полагать $b>a$. Выделив внутри данного треугольника правильный треугольник с длиной стороны a, получим дополнительный к нему треугольник с длинами сторон a, $b-a$, c и углом 120° (см. рисунок).



Про этот дополнительный треугольник («родственный» исходному) мы уже все знаем. Осталось только применить разработанную выше теорию к дополнительному треугольнику с углом 120°, а затем распространить результат на исходный треугольник.

Упражнение 2. Докажите, что если a, b, c – длины сторон целочисленного треугольника с углом 60°, причем $b>a$, то найдутся такие натуральные m и n, что

$$a=n^2-m^2,\ b=n^2+2mn,\ c=m^2+mn+n^2.$$

При этом $n-m$ не делится на 3.