

Целочисленные треугольники

Э.БАЛАШ

В ДАННОЙ ЗАМЕТКЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ НАЗЫВАЮТСЯ такие треугольники, длины сторон которых выражаются натуральными числами.

Хорошо изучены целочисленные прямоугольные треугольники. Длины их сторон a , b , c представляются так называемыми *пифагоровыми* тройками чисел (a, b, c) :

$$a = l(m^2 - n^2);$$

$$b = 2lm;$$

$$c = l(m^2 + n^2).$$

Здесь l, m, n — произвольные натуральные числа такие, что $m > n$. Выражения для a и b можно переставлять местами.

Нас будут интересовать целочисленные треугольники с длинами сторон a, b, c , содержащие углы 60 или 120 градусов. Условимся всегда считать сторону c противолежащей углу, кратному 60° .

Целочисленные треугольники с углом 120°

Если треугольник имеет угол 120° , то его стороны a, b, c связаны равенством

$$a^2 + ab + b^2 = c^2. \quad (1)$$

Это следует из *теоремы косинусов*, согласно которой для произвольного треугольника с длинами сторон a, b, c и углом α , противолежащим стороне c , выполняется равенство $a^2 - 2ab \cos \alpha + b^2 = c^2$.

Наоборот, если стороны треугольника a, b, c связаны соотношением (1), то сторона c лежит против угла 120° . Действительно, в этом случае косинус угла α , противолежащего стороне c , согласно (1) и теореме косинусов равняется $-\frac{1}{2}$, что возможно лишь в том случае, если $\alpha = 120^\circ$.

Равенство (1) позволяет «забыть» о геометрии: задачу поиска целочисленных треугольников с углом 120° мы свели к задаче решения уравнения (1) в натуральных числах. На поиске решений в натуральных числах уравнения (1) мы сейчас и сосредоточим свои усилия.

Прежде всего заметим, что если какая-то тройка натуральных чисел (a, b, c) удовлетворяет уравнению (1), причем у чисел a и b имеется общий делитель d , то на d будет делиться также и число c . Это наблюдение позволяет ограничиться поиском лишь таких решений (a, b, c) , у которых числа a и b взаимно просты. Все другие решения будут отличаться от найденных натуральным множителем. В дальнейшем мы будем предполагать числа a и b взаимно простыми, не оговаривая это особо.

Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Пусть натуральные числа a, b, c связаны соотношением (1), тогда c не делится на 3, а из двух чисел $c + a - b$ и $c + b - a$ одно делится на 3, а другое не делится.

Действительно, из равенства (1) следует, что $c^2 - (a^2 - b^2) = 3ab$. Если c делится на 3, то $a - b$ делится на 3. Но квадраты чисел, делящихся на 3, делятся на 9. Левая часть выписанного равенства делится на 9, значит, и $3ab$ тоже делится на 9. Тогда ab делится на 3, т.е. одно из чисел a или b делится на 3. Но тогда и другое из этих чисел делится на 3, поскольку $a - b$ делится на 3. А это невозможно, поскольку числа a и b взаимно просты. Полученное противоречие говорит о том, что исходное допущение неверно. Итак, число c не делится на 3. Далее, из равенства $(c + a - b)(c + b - a) = 3ab$ следует, что одно из чисел $c + a - b$ или $c + b - a$ делится на 3. Оба они не могут делиться на 3, поскольку в противном случае их сумма делилась бы на 3, что невозможно.

Теорема. Пусть числа a, b, c связаны соотношением (1). Тогда найдутся натуральные взаимно простые числа n и m ($n > m$) такие, что $n - m$ не делится на 3 и

$$a = n^2 - m^2, \quad b = m^2 + 2mn, \quad c = m^2 + mn + n^2 \quad (2).$$

Доказательство. Будем полагать, что $c + a - b$ не делится на 3. Этого всегда можно добиться выбором обозначений, поскольку в выражение $a^2 + ab + b^2$ переменные a и b входят симметрично. Введем вспомогательный параметр $k = \frac{b}{c+a}$. Так как a, b и c — целые числа, то k — рациональное число. Пусть $k = \frac{m}{n}$, где дробь $\frac{m}{n}$ будем предполагать несократимой. Так как $ab + b^2 = c^2 - a^2$, то $b(a+b) = (c-a)(c+a)$. Заменяем везде b на $k(c+a)$: $k(c+a)(a+kc+ka) = (c-a)(c+a)$.

Так как $c+a \neq 0$, то на $c+a$ можно сократить: $ka + k^2c + k^2a = c - a$, откуда $(k^2 + k + 1)a = (1 - k^2)c$ и $\frac{a}{c} = \frac{1 - k^2}{k^2 + k + 1}$. Прибавим к обеим частям последнего равенства по единице: $\frac{a+c}{c} = \frac{k+2}{k^2 + k + 1}$. Теперь умно-

жим обе части последнего равенства на k : $\frac{k(a+c)}{c} = \frac{k^2 + 2k}{k^2 + k + 1}$. Но $k(a+c) = b$, поэтому $\frac{b}{c} = \frac{k^2 + 2k}{k^2 + k + 1}$.

Заменяем везде k на $\frac{m}{n}$. После упрощений получим

$$\frac{a}{c} = \frac{n^2 - m^2}{m^2 + mn + n^2}, \quad \frac{b}{c} = \frac{m^2 + 2mn}{m^2 + mn + n^2},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{n^2 - m^2}{m^2 + 2mn}.$$