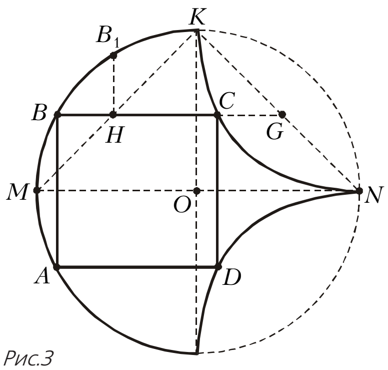

Рис.3

б) Пусть круг, содержащий фигуру F, имеет радиус $MO = 1$ (рис.3). Впишем в F прямоугольник $ABCD$ такой, что $AB = 1$. Убедимся, что $ABCD$ – квадрат; для этого покажем, что $BC = 1$. Отрезок HG – средняя линия треугольника MKN, $HG = 1$. Далее, $\angle B_1HB = 90^\circ$, $BH = B_1H = CG$. Значит, $BC = HG$, т.е. $BC = 1$. Таким образом, фигуру F можно представить как объединение двух частей: квадрата $ABCD$ и дополнительной части Q, составляющие элементы которой пристегнуты «точками-пуговками» A, B, C и D друг к другу.

Часть Q расположим на плоскости иначе – как показано на рисунке 4, отразив нижний и верхний ее элементы относительно AD и BC. Далее, «расстегнув» пуговки A, B, C и D, расположим элементы так, чтобы они образовали второй квадрат $ABCD$ (рис.5). На этом завершим решение задачи-головоломки.

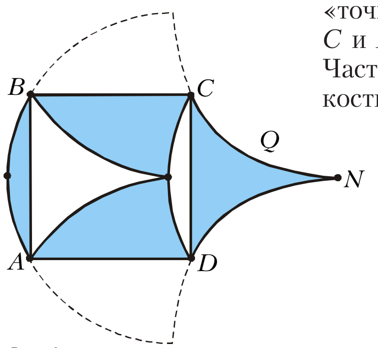

Рис.4

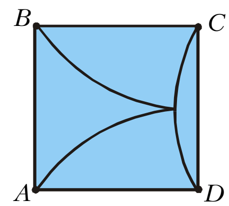

Рис.5

В.Произволов

М1814. *Пусть a, m_1, m_2 – натуральные числа, причем a взаимно просто как с m_1, так и с m_2. Обозначим через r_n остаток от деления целой части числа a^n/m_1 на m_2 ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Докажите, что последовательность $\{r_n\}$ является периодической.*

Так как $\text{НОД}(a, m_1) = \text{НОД}(a, m_2) = 1$, то $\text{НОД}(a, m_1m_2) = 1$. Пусть n_0 – какое-нибудь натуральное число, для которого a^{n_0} при делении на m_1m_2 дает в остатке 1. (Если $\text{НОД}(a, m_1m_2) = 1$, то такое число обязательно существует. Можно, например, положить $n_0 = \varphi(m_1m_2)$, где $\varphi(m)$ – функция Эйлера – см. статью В.Сендерова и А.Спивака «Малая теорема Ферма» в «Кванте» №1 за 2000 год.)

Тогда $a^{n_0} = Qm_1m_2 + 1$ для некоторого целого числа Q. Теперь при любом $n \ge n_0$ имеем

$$\left[\frac{a^n}{m_1}\right] = \left[\frac{a^{n_0}a^{n-n_0}}{m_1}\right] = \left[\frac{(Qm_1m_2+1)a^{n-n_0}}{m_1}\right] =$$

$$= \left[a^{n-n_0}Qm_2 + \frac{a^{n-n_0}}{m_1}\right] = a^{n-n_0}Qm_2 + \left[\frac{a^{n-n_0}}{m_1}\right].$$

($[x]$ обозначает целую часть числа x).

Таким образом, остатки чисел $\left[a^n/m_1\right]$ и $\left[a^{n-n_0}/m_1\right]$ при делении на m_2 совпадают, т.е. $r_n = r_{n-n_0}$. Значит, последовательность $\{r_n\}$ имеет период длины n_0 (доказано также и то, что этот период начинается с самого начала последовательности).

Возникает вопрос о длине *наименьшего* периода последовательности $\{r_n\}$. Верно ли, что если в качестве n_0 взять *наименьшее* натуральное число такое, что a^{n_0} при делении на m_1m_2 дает в остатке 1, то n_0 и будет длиной наименьшего периода? Как показывает пример $a = 3$, $m_1 = 13$, $m_2 = 2$ (здесь $n_0 = 3$, а последовательность $\{r_n\}$ сплошь состоит из нулей), ответ на этот вопрос в общем случае отрицателен. Однако если дополнительно предположить, например, что $m_2 \ge m_1$, то ответ будет утвердительным (читателю предлагается доказать это в качестве упражнения).

Н.Осипов

М1815. *Общие перпендикуляры к противоположным сторонам неплоского четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Докажите, что они пересекаются.*

Инструментом решения является теорема Менелая для пространственного четырехугольника, утверждающая, что *точки X, U, Y, V, взятые на сторонах четырехугольника AB, BC, CD, DA или их продолжениях, лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда* $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BU}{UC}\cdot\frac{CY}{YD}\cdot\frac{DV}{VA} = 1$.

Для доказательства теоремы Менелая продолжим прямые XU и YV до пересечения с AC. Точки X, U, Y, V лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда все три прямые пересекаются в одной точке P либо параллельны (рис.1). Но в этом случае, применяя теорему

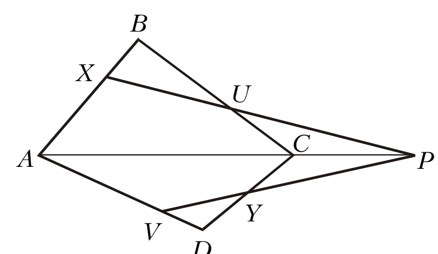

Рис.1

Менелая к треугольникам ABC и ACD, получаем $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BU}{UC}\cdot\frac{CP}{PA} = 1$ и $\frac{CY}{YD}\cdot\frac{DV}{VA}\cdot\frac{AP}{PC} = 1$. Перемножая эти равенства, получим требуемое соотношение.

Пусть теперь XY – перпендикуляр к сторонам AB и CD, UV – перпендикуляр к AD и BC. При ортогональной проекции на плоскость, параллельную XY и UV, прямой угол между прямыми AB и XY остается прямым. Поэтому четырехугольник $ABCD$ проецируется в прямоугольник $A'B'C'D'$, а прямые XY и UV – в параллельные его сто-

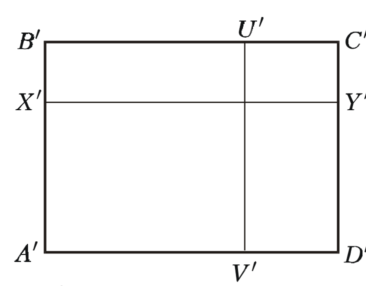

Рис.2