

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2003 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5–2002» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1831» или «Ф1838». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1836–М1838 предлагались на XXVIII Всероссийской математической олимпиаде.

Задачи Ф1838, Ф1841 – Ф1845 и Ф1847 предлагались на XXXVI Всероссийской физической олимпиаде.

Задачи М1831–М1840, Ф1838–Ф1847

М1831. В наборе 20 гирек, массы которых различны. Среди любых одиннадцати из них можно выбрать две, общая масса которых равна 100 г. Докажите, что общая масса всех 20 гирек набора равна 1000 г.

В.Произволов

М1832. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон в точках A' , B' , C' (рис.1). Точка Q – середина $A'B'$. Докажите, что углы $B'C'C$ и $A'C'Q$ равны.

А.Заславский

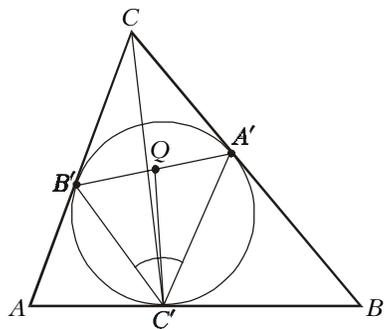


Рис.1

М1833. Фигура «танк» ходит по горизонтали или вертикали ровно на n клеток ($n > 1$), закрашивая все клетки, по которым прошла. Сделав несколько

ходов на бесконечной клетчатой доске, «танк» вернулся на исходную позицию. Оказалось, что его след нигде себя не пересек. При каких n площадь, ограниченная следом «танка», может оказаться равной 2002?

А.Малеев, С.Волченков

М1834. Для действительных чисел x , y , z докажите неравенства

$$\begin{aligned} \text{а) } x^6 y^6 + x^6 z^6 + y^6 z^6 + 3x^4 y^4 z^4 &\geq \\ &\geq 2(x^3 + y^3 + z^3)x^3 y^3 z^3; \end{aligned}$$

$$\text{б) } x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2 y^2 z^2 \geq 2(x^3 y^3 + x^3 z^3 + y^3 z^3).$$

Ф.Шлейфер

М1835. Около четырехугольника можно описать окружность и в него можно вписать окружность. Через центр вписанной окружности проведена прямая, параллельная какой-либо стороне четырехугольника, две его противоположные стороны отсекают на ней отрезок. Докажите, что длина отсекаемого отрезка равна четверти периметра четырехугольника.

В.Произволов

М1836. Гидры состоят из голов и шей (любая шея соединяет ровно две головы). Одним ударом меча можно снести все шеи, выходящие из какой-то головы A гидры. Но при этом из головы A мгновенно вырастает по одной шее во все головы, с которыми A не была соединена. Геракл победит гидру, если ему удастся разрубить ее на две не связанные шеями части. Найдите наименьшее N , при котором Геракл сможет победить любую стошею гидру, нанеся не более чем N ударов.

Ю.Лифшиц

М1837. Докажите, что для любого натурального числа $n > 10000$ найдется такое натуральное число m , представимое в виде суммы двух квадратов, что $0 < m - n < 3\sqrt[4]{n}$.

А.Голованов

М1838. На плоскости взято конечное число красных и синих прямых, среди которых нет параллельных, так, что через любую точку пересечения одноцветных прямых проходит прямая другого цвета. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.

В.Дольников, И.Богданов