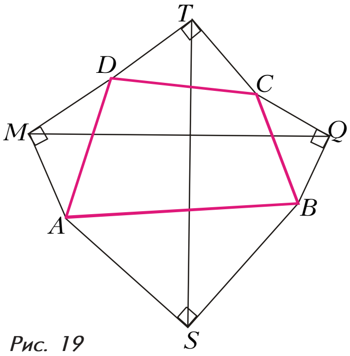

Рис. 19

Задача 11. *Дан четырехугольник ABCD. На его сторонах как на гипотенузах построены прямоугольные равнобедренные треугольники DMA, CTD, BQC, ASB (рис.19). Докажите, что отрезки MQ и ST равны и взаимно перпендикулярны.*

Решение. Переместим точку M в точку Q в два приема. Сначала переместим точку D в точку B, оставляя точку A неподвижной. Тогда точка M займет некое положение M_1 (рис.20). Поскольку при этом $m = AM : AD = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\alpha = 45^\circ$, то

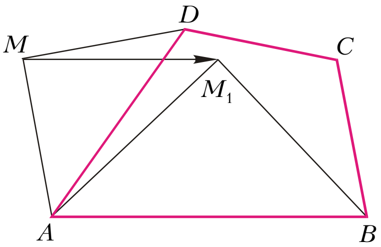

Рис. 20

$$(\Delta\vec{r}_M)_1 = \overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta\vec{r}_D^{\,45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{DB}^{45^\circ}, \text{ т.е. } \overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{DB}^{45^\circ}.$$

Затем, не двигая точку B, совместим точку A с точкой C. При этом точка M_1 совместится с точкой Q (рис.21). Так как в этом случае $m = BM_1 : BA = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\alpha = -45^\circ$, то вектор $\overrightarrow{M_1Q}$ перемещения точки M_1 связан с вектором $\overrightarrow{AC}$ перемещения точки A равенством

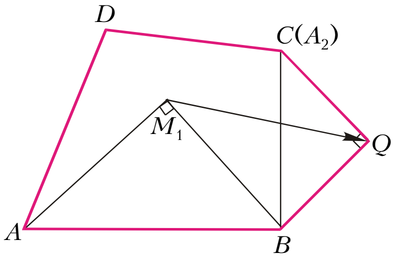

Рис. 21

$$(\Delta\vec{r}_M)_2 = \overrightarrow{M_1Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AC}^{-45^\circ}.$$

Окончательно имеем

$$\overrightarrow{MQ} = \Delta\vec{r}_M = (\Delta\vec{r}_M)_1 + (\Delta\vec{r}_M)_2 = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1Q} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{DB}^{45^\circ} + \overrightarrow{AC}^{-45^\circ}\right). \quad (18)$$

Аналогично поступим с точкой T. Сначала, оставляя неподвижной точку D, совместим точку C с точкой A. При этом точка T займет положение T_1 (рис.22). И тогда будут выполнены равенства

$$(\Delta\vec{r}_T)_1 = \overrightarrow{TT_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{CA}^{45^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AC}^{45^\circ}.$$

Затем, не меняя положения точки A, совместим точку D с точкой B. Тогда точка T_1 совпадет с точкой S (рис. 23). Так как в этом случае $m = AM : MD = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\alpha = -45^\circ$, то

$$(\Delta\vec{r}_T)_2 = \overrightarrow{T_1S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{DB}^{-45^\circ}.$$

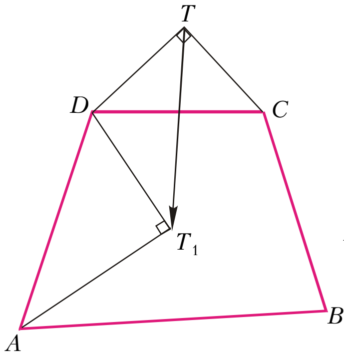

Рис. 22

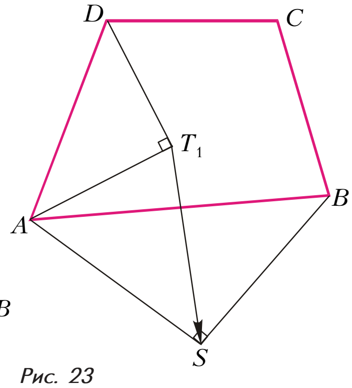

Рис. 23

Складывая перемещения $(\Delta\vec{r}_T)_1$ и $(\Delta\vec{r}_T)_2$, получим

$$\overrightarrow{TS} = \Delta\vec{r}_T = (\Delta\vec{r}_T)_1 + (\Delta\vec{r}_T)_2 = \overrightarrow{TT_1} + \overrightarrow{T_1S} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\overrightarrow{AC}^{45^\circ} + \overrightarrow{DB}^{-45^\circ}\right).$$

Повернем теперь вектор $\overrightarrow{TS}$ на 90°:

$$\overrightarrow{TS}^{90^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\overrightarrow{AC}^{135^\circ} + \overrightarrow{DB}^{45^\circ}\right).$$

Учитывая, что $-\overrightarrow{AC}^{135^\circ} = \left(-\overrightarrow{AC}^{180^\circ}\right)^{-45^\circ} = \overrightarrow{AC}^{45^\circ}$, получим

$$\overrightarrow{TS}^{90^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{AC}^{-45^\circ} + \overrightarrow{DB}^{45^\circ}\right).$$

Сравнивая это выражение с (18), приходим к равенству $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{TS}^{90^\circ}$. Из него и следует то, что требовалось доказать.

Упражнения

8. Дан четырехугольник $ADCB$. На его сторонах как на гипотенузах построены подобные прямоугольные треугольники BMA, CTB, DQC, ASD с углами α при вершинах A, C и с углами β при вершинах B и D. Докажите, что отрезки MQ и ST равны и угол между ними равен 2α (2β).

9. Дан четырехугольник $ADCB$. На его сторонах как на гипотенузах построены прямоугольные равнобедренные треугольники AOB, BQC, CSD, DTA. Докажите, что если вершины O и S совпадают, то совпадают вершины Q и T.

10. Дан четырехугольник $ADCB$. На его сторонах как на гипотенузах построены прямоугольные равнобедренные треугольники AOB, CQB, CSD, ATD. Докажите, что если вершины O и S совпадают, то отрезок QT проходит через их общую точку и делится в ней пополам.

11. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = \sqrt{3}\,CD$ и при этом угол между прямыми AB и CD равен 30°. На стороне AD построен равносторонний треугольник ADL, а на стороне BC – равнобедренный треугольник BKC с углом 120° при вершине C. Докажите, что точки L, D, K лежит на одной прямой и точка D является серединой отрезка KL.

12. В трапеции $ABCD$, с основаниями AB и CD, $AB = \sqrt{3}\,CD$. На ее боковых сторонах AD, BC и диагоналях AC, BD построены как на гипотенузах подобные прямоугольные треугольники DLA, CNB, CMA, DKB с углами 30° при вершинах A, B и 60° при вершинах C, D. Докажите, что четырехугольник $KNML$ – квадрат со стороной, вдвое меньшей основания AB. Найдите углы, которые образуют с основаниями трапеции стороны квадрата.