Но разности векторов $\vec{r}_A - \vec{r}_{A_0}$ и $\vec{r}_B - \vec{r}_{B_0}$ есть векторы перемещений точек A и B:

$$\vec{r}_A - \vec{r}_{A_0} = \Delta\vec{r}_A,\ \ \vec{r}_B - \vec{r}_{B_0} = \Delta\vec{r}_B\ ,$$

т.е. вместо (14) запишем равенство

$$\Delta\vec{r}_B = m\Delta\vec{r}_A^{\,\alpha}\,. \qquad (15)$$

Таким образом, мы доказали лемму: *если при движении точек A и B в плоскости выполняется равенство (12) или (13) (включая случай, когда постоянный вектор является нулевым), то выполняется равенство (15).*

Теперь вернемся к равенствам (4), (5), (7). Из них, соответственно, следуют равенства

$$\Delta\vec{r}_L = m\Delta\vec{r}_C^{\,\alpha}\ ,\ \ \Delta\vec{r}_K = n\Delta\vec{r}_C^{\,\beta}\ ,\ \ \Delta\vec{r}_L = \frac{m}{n}\Delta\vec{r}_K^{\,(\alpha-\beta)}\ . \qquad (16)$$

Собственно говоря, равенства (4), (5), (7) являются частными случаями соответственных равенств (16), если положить начальные радиусы-векторы точек K, L, C равными нуль-вектору:

$$\vec{r}_{C_0} = \vec{r}_{K_0} = \vec{r}_{L_0} = \vec{0}.$$

Перейдем к примерам использования полученных соотношений.

Задача 8. *Вернемся к задаче 6 и дадим ее решение в новой технике.*

Решение. Из треугольника ACL (см. рис.13) имеем равенство $\overrightarrow{CL} = \cos\gamma\left(\overrightarrow{CA}^{-\gamma}\right)$, что соответствует (13) при $\vec{R} = \vec{0}$. Поэтому, если оставлять точку C неподвижной, то, согласно лемме, $\overrightarrow{\Delta r_L} = \cos\gamma\overrightarrow{\Delta r_A}^{-\gamma}$. Переместим точку A в точку B: $\overrightarrow{\Delta r_A} = \overrightarrow{AB}$. При этом точка L переместится в точку K: $\overrightarrow{\Delta r_L} = \overrightarrow{LK}$. Но тогда $\overrightarrow{LK} = \cos\gamma\left(\overrightarrow{AB}^{-\gamma}\right)$, т.е. $LK = AB\cos\gamma$ и образует с AB угол γ.

Задача 9. *На сторонах произвольного четырехугольника ABCD построены равнобедренные прямоугольные треугольники DL_1A, CK_1D, BL_2A, CK_2B (рис.17). Требуется доказать, что отрезки K_1K_2 и L_1L_2 взаимно перпендикулярны и равны.*

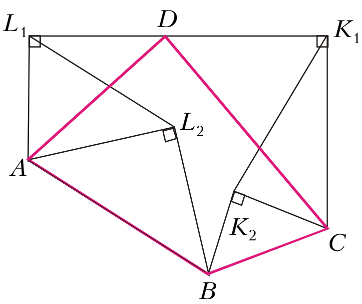

Рис. 17

Решение. Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник DL_1A. Из него получаем

$$\angle L_1AD = \alpha = 45^\circ\ ,$$

$$AL_1 : AD = m = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник CK_1D. Из него получаем

$$\angle K_1CD = \beta = -45^\circ\ ,\ \ CK_1 : CD = n = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Таким образом, $m : n = 1$, $\alpha - \beta = 90^\circ$.

Переместим теперь точку D в точку B. Тогда точка L_1 переместится в точку L_2, а точка K_1 переместится в точку K_2. Отсюда векторы перемещений точек D, L_1 и K_1 равны

$$\Delta\vec{r}_D = \overrightarrow{DB}\ ,\ \ \Delta\vec{r}_{L_1} = \overrightarrow{L_1L_2}\ ,\ \ \Delta\vec{r}_{K_1} = \overrightarrow{K_1K_2}\ .$$

Осталось воспользоваться формулами (16):

$$\overrightarrow{L_1L_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{DB}^{45^\circ},\ \ \overrightarrow{K_1K_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{DB}^{-45^\circ},\ \ \overrightarrow{L_1L_2} = \overrightarrow{K_1K_2}^{90^\circ}.$$

Последнее равенство показывает нам перпендикулярность прямых K_1K_2 и L_1L_2 и равенство отрезков K_1K_2 и L_1L_2.

Задача 10. *На сторонах AD, BC и на диагоналях AC, BD параллелограмма ABCD построены равнобедренные прямоугольные треугольники DLA, CMB, CNA, DKB соответственно (прямые углы – в точках L, K, N, M). Докажите, что KMNL – квадрат (рис.18).*

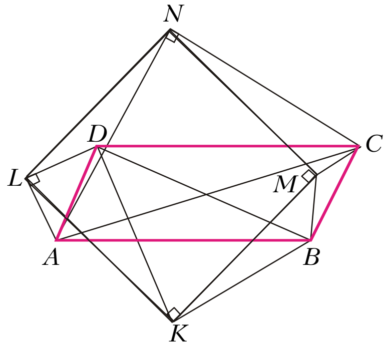

Рис. 18

Решение. Рассмотрим треугольник DLA. В этом треугольнике выполняется равенство $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{DA}^{-45^\circ}$.

Рассмотрим перемещение этого треугольника такое, при котором точка D остается неподвижной, а точка A перемещается в точку B. При таком перемещении точка L попадет в точку K. При этом $\Delta\vec{r}_A = \overrightarrow{AB}$, $\Delta\vec{r}_L = \overrightarrow{LK}$. Тогда из леммы приходим к равенству

$$\overrightarrow{LK} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}^{-45^\circ}.$$

Точно так же, рассматривая треугольник ABC и построенные на его сторонах треугольники CNA и CMB, мы получим, рассматривая аналогичное перемещение, что

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}^{-45^\circ}\,. \qquad (17)$$

Из двух последних равенств мы видим, что $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{LK}$, поэтому $KMNL$ – параллелограмм.

Аналогично можно доказать, что верно равенство $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{LN} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{DC}^{45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}^{45^\circ}$ (так как $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$). Сравнивая полученные выражения для KM и LK, видим, что $KM = LK$, а потому $KMNL$ – ромб.

И, наконец, $KMNL$ – квадрат. В самом деле, из равенства $\overrightarrow{KM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}^{45^\circ}$ мы получаем равенство $\overrightarrow{AB} = \sqrt{2}\overrightarrow{KM}^{-45^\circ}$. Подставим найденное значение для $\overrightarrow{AB}$ в равенство (17) и получим

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}^{-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\overrightarrow{KM}^{-45^\circ}\right)^{-45^\circ} = \overrightarrow{KM}^{-90^\circ}.$$

Из этого равенства видим, что угол NMK прямой. Но тогда ромб $KMNL$ является квадратом.

В заключение можно заметить, что задача обобщается на произвольный четырехугольник. На двух его сторонах и диагоналях строятся соответствующим образом подобные треугольники и четыре их вершины оказываются вершинами параллелограмма.

Рассмотренная идея решения имеет некую модификацию. Проиллюстрируем ее на такой задаче.