Кроме того, вершина прямого угла треугольника в обозначении треугольника записывается посередине.)

Упражнения

1. На сторонах AC и BC треугольника ABC построены равнобедренные треугольники ALC ($AL = CL$) и BKC ($BK = KC$) с углом 30° при основании. Докажите, что $KL = \frac{AB}{\sqrt{3}}$. Найдите угол между прямыми KL и AB.

2. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABQ ($AB = BQ$), BKC ($BK = KC$) и LCA ($CA = CL$). Докажите, что точки Q, K, L лежат на одной прямой и точка K делит отрезок QL пополам.

3. На стороне AC треугольника ABC построен равнобедренный треугольник ACL ($AL = CL$) с углами при основании, равными 30°, а на стороне BC – прямоугольный треугольник KCB с прямым углом при вершине C и углом 30° при вершине B. Точка Q делит сторону AB в отношении $AQ : QB = 1 : 2$. Докажите, что треугольник KLQ – прямоугольный с прямым углом при вершине L и углом 60° при вершине Q.

4. На сторонах AB и AC треугольника ABC построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABQ и LAC с прямыми углами при вершинах B и A соответственно. Точка K лежит на продолжении стороны BC ($BK = BC$). Докажите, что треугольник KQL – прямоугольный равнобедренный с прямым углом при вершине Q.

Кинематика в четырехугольнике

Аналогичные соображения используются, когда исходной фигурой является четырехугольник. Посмотрим на решение такой задачи.

Задача 7. *В трапеции ABCD основание AB в два раза больше основания CD (рис.15). На боковых сторонах трапеции вне трапеции построены прямоугольные равнобедренные треугольники DLA и BKC. Из середины M основания AB проведен вне трапеции перпендикуляр MQ такой, что* $MQ = \frac{1}{4}AB$. *Докажите, что отрезки QL и QK равны и взаимно перпендикулярны.*

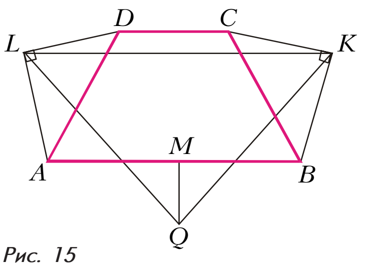

Рис. 15

Решение. Прежде всего из данных задачи заметим, что

$$\overline{AL} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{AD}^{45^\circ} \text{ и } \overline{BK} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{BC}^{-45^\circ}.$$

Теперь, не двигая основания AB, будем поступательно перемещать основание CD. При таком перемещении $\vec{V}_D = \vec{V}_C$. Из этих соотношений получаем, что $\vec{V}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{V}_D^{45^\circ}$, $\vec{V}_K = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{V}_C^{-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{V}_D^{-45^\circ}$. Отсюда $\vec{V}_D = \vec{V}_C = \sqrt{2}\vec{V}_K^{45^\circ}$. Поэтому выполняется равенство $\vec{V}_L = \vec{V}_K^{90^\circ}$. Но тогда выполняется соотношение $\vec{r}_L = \vec{R}_K^{90^\circ} + \vec{R}$. Следовательно, существует такая точка P, что $\vec{R} = \vec{0}$, т.е.

$$\overline{PL} = \overline{PK}^{90^\circ}. \tag{11}$$

Найдем положение этой точки P. В качестве определяющего возьмем такое положение основания CD, при котором отрезки KC, CD, DL окажутся на одной прямой KL, их объединение будет отрезком KL, равным и параллельным AB, и четырехугольник $ABKL$ будет прямоугольником (рис.16).

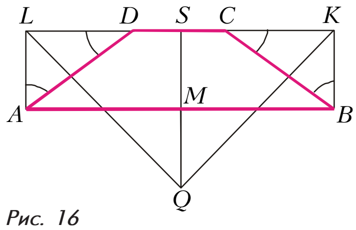

Рис. 16

При этом окажется – это легко показать, – что $LA = KB = \frac{1}{4}AB$. Если теперь построить точку Q так, как указано в условии задачи, и продлить отрезок QM до пересечения его с KL в точке S, то, очевидно, получим, что $QS = 2QM = SL = SK$ и $SQ \perp KL$. Последнее означает, что треугольники QSL и KSQ равные между собой, прямоугольные и равнобедренные. Отсюда заключаем, что $\angle LQK = 90^\circ$ и $QK = QL$. Сравнивая последние равенства с равенством (11), мы видим, что точки P и Q совпадают.

Следовательно, это выполняется и в любом другом положении.

Упражнения

5. В четырехугольнике $ABCD$ сторона CD вдвое меньше стороны AB и образует с ней угол 60°. На сторонах BC и AD построены равнобедренные треугольники BKC ($BK = KC$) и ADL ($LA = LD$) с углами 30° при основании, а на стороне AB – прямоугольный треугольник AQB с углом 60° при вершине A, углом 30° при вершине B и прямым углом при вершине Q. Докажите, что треугольник QKL равносторонний.

6. В четырехугольнике $ABCD$ сторона CD вдвое меньше стороны AB и образует с ней угол 60°. На сторонах BC и AD построены подобные прямоугольные треугольники KCB и ADL с углами 30° при вершинах B и A и прямыми углами при вершинах C и D. Докажите, что треугольник AKL равносторонний.

7. В трапеции $ABCD$ основание CD вдвое меньше основания AB. На ее боковых сторонах AD и BC построены равнобедренные прямоугольные треугольники ADL и BCK с гипотенузами AL и BK соответственно. Найдите отношение отрезков KL и AB, а также угол между ними.

Приращения и скорости

Теперь мы перейдем к получению новых, но вполне очевидных векторных соотношений. Пусть точки A и B движутся в плоскости таким образом, что все время выполняется равенство

$$\vec{V}_B = m\vec{V}_A^{\alpha}, \tag{12}$$

где m и α – постоянные. Из равенства (12) получаем интегрированием уравнение

$$\vec{r}_B = m\vec{r}_A^{\alpha} + \vec{R}. \tag{13}$$

Постоянную $\vec{R}$ найдем из следующих начальных условий: пусть при $t = 0$ (в начальный момент времени) $\vec{r}_A = \vec{r}_{A_0}$ и $\vec{r}_B = \vec{r}_{B_0}$. Подставляя значения $\vec{r}_{A_0}$ и $\vec{r}_{B_0}$ в (13), получим

$$\vec{R} = \vec{r}_{B_0} - m\vec{r}_{A_0}^{\alpha}.$$

Тогда равенство (13) приводится к равенству

$$\vec{r}_B - \vec{r}_{B_0} = m\left(\vec{r}_A - \vec{r}_{A_0}\right)^{\alpha}. \tag{14}$$