

Рис. 5

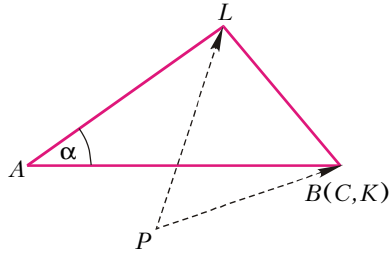


Рис. 6

будут относиться как $m : n$, т.е.

$$PL : PK = m : n.$$

Можно даже записать точнее (рис.5):

$$\overline{PL} = \frac{m}{n} \overline{PK}^{\alpha-\beta}. \quad (9)$$

Задача сводится к нахождению полюса P , т.е. к однозначному определению его положения относительно неподвижного (в процессе движения точки C) отрезка AB . Для этого будем искать определяющий момент времени. В частности, такой момент наступит тогда, когда точка C совпадет с точкой B или с точкой A . Докажем это.

Рассмотрим случай (рис.6), когда точка C совпадает с точкой B . Тогда и точка K совпадает с точкой B . (Иначе говоря, треугольник BCK вырождается в точку.) Сначала заметим, что из равенства (9) для векторов \overline{PL} и \overline{PK} следует, что

$$PL = \frac{m}{n} PK.$$

Далее, по теореме косинусов из треугольника KLA находим

$$KL = c\sqrt{1+m^2-2m\cos\alpha}.$$

Теперь можем найти отрезки PK и PL . Сначала по теореме косинусов из треугольника PKL находим

$$KL = PK\sqrt{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2-2\frac{m}{n}\cos(\alpha-\beta)},$$

откуда

$$PK = \frac{KL}{\sqrt{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2-2\frac{m}{n}\cos(\alpha-\beta)}}. \quad (10)$$

Тогда

$$PL = \frac{m}{n} PK = \frac{KL}{\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)^2+1-2\frac{n}{m}\cos(\alpha-\beta)}}.$$

В результате найдены три стороны в треугольнике PKL , и тем самым положение полюса P можно установить. Но по трем сторонам можно построить два треугольника, поэтому надо следить за соответствующей ориентацией угла между векторами \overline{PK} и \overline{PL} — она должна соответствовать знаку разности $\alpha-\beta$.

Выделим из общего решения три частных случая:

1) $\alpha-\beta=0^\circ$: а) $m=n$; б) $m\neq n$; 2) $\alpha-\beta=180^\circ$.
Случай 1,а) несколько особый, мы рассмотрим его позже. В случаях 1,б и 2 векторы \overline{PL} и \overline{PK} коллинеарны, причем в случае 1,б они сонаправлены, а в случае 2 — противоположно направлены. Отсюда следует, что в случае 1,б точка P лежит вне отрезка KL , а в случае

2 точка P лежит на отрезке KL . Проиллюстрируем случаи 1,б и 2 на конкретных задачах.

Случай $\alpha-\beta=0^\circ$; $m\neq n$. Так как угол между отрезками PK и PL в этом случае равен 0° , то треугольник PLK вырождается в отрезок. По формуле (10) получаем

$$PK = \frac{KL}{\left|1-\frac{m}{n}\right|} \quad (\text{или } PL = \frac{m}{n} PK).$$

В этом случае полюс P лежит на прямой KL вне отрезка KL . Положение точки P относительно точек K, L зависит от величины m/n и устанавливается однозначно.

В дальнейшем мы постоянно используем результаты и обозначения этой задачи (α, β, P).

Задача 3. На сторонах треугольника ABC построены прямоугольные треугольники CLA и BCK с острыми углами α и γ (рис.7). Точка Q лежит на прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой AB . При этом $AQ = AB \operatorname{tg} \gamma$. Докажите, что точки Q, L, K лежат на одной прямой и $QL : QK = \cos^2 \alpha$.

Решение. В этой задаче

$$\alpha-\beta=0^\circ, \quad m = \cos \alpha, \quad n = 1/\cos \alpha \quad (m \neq n).$$

Значит, полюс P , точки L и K лежат на одной прямой и при этом $PL : PK = m : n = \cos^2 \alpha$. Осталось доказать, что полюс P совпадает с точкой Q . Для этого воспользуемся обоими определяющими положениями точки C . Сначала совместим точку C с точкой A (рис.8). Новое положение точки $C - C_1$ — и новое положение точки $L - L_1$ — совпадут с точкой A , а точка K займет положение K_1 (треугольник ACL вырождается в точку). В этом случае полюс P лежит на одной прямой с точками L_1, K_1 , в данной ситуации — на перпендикуляре к AB , проходящем через точку A . Затем совместим точку C с точкой B . Тогда новое положение точки $C - C_2$ — и новое положение точки $K - K_2$ — совпадут с точкой B , а точка L займет положение L_2 (треугольник BCK вырождается в точку). В этом случае полюс P лежит на одной прямой с точками L_2, K_2 . Оказывается, что полюс P является точкой пересечения прямых K_1L_1 и K_2L_2 , т.е. точкой Q . Отсюда и следует, что $AQ = AB \operatorname{tg} \gamma$.

(Вместо того, чтобы брать два определяющих момента, можно взять только один из них и использовать отношение $m : n$.)

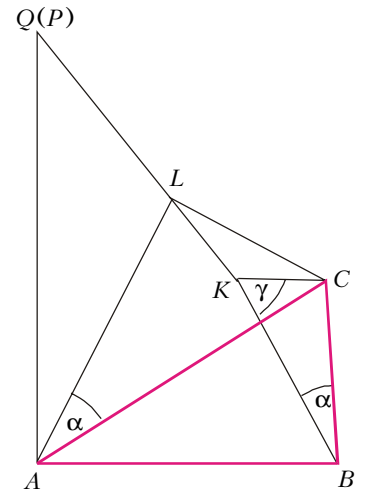


Рис. 7

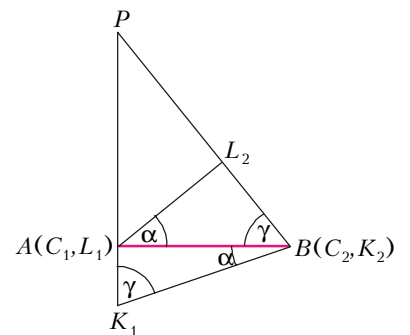


Рис. 8