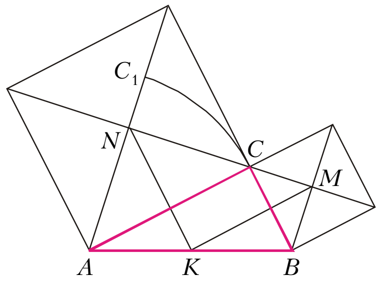

Рис. 2

Решение. Заметим, что в результате поворота вектора $\overrightarrow{AC}$ на $45°$ вокруг точки A точка C переходит в точку C_1, лежащую на диагонали квадрата, построенного на стороне AC: $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC}^{45°}$. В результате поворота вектора длина его не меняется, а потому $AC_1 = AC$. Так как $AN = AC \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $AN = AC_l \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$. Отсюда имеем, что $\overline{AN} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{AC_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{AC}^{45°}$.

Аналогично получаем, что $\overline{BM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{BC_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{BC}^{-45}$.

Начнем двигать точку C по плоскости, оставив сторону AB неподвижной. Проследим, что будет происходить при этом с центрами построенных квадратов – точками N и M.

В процессе движения точки C (согласно 13°) будет выполняться равенство

$$\vec{V}_N = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{V}_C^{45°}. \tag{1}$$

(В последнем равенстве радиусы-векторы имеют начало в точке A.)

Аналогичными рассуждениями, взяв начало в точке B, получаем, что $\vec{V}_M = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{V}_C^{-45°}$, откуда $\vec{V}_C = \sqrt{2}\vec{V}_M^{45}$. Подставив полученное выражение для вектора $\vec{V}_C$ в равенство (1), выводим (используя 5°), что $\vec{V}_N = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\vec{V}_M^{45°}\right)^{45°} = \vec{V}_M^{90°}$.

Из этого равенства следует (согласно 14°), что $\vec{r}_N = \vec{r}_M^{90°} + \vec{R}$, где $\vec{R}$ – некоторый постоянный вектор, т.е. вектор, который не меняется при движении точки C. Поэтому, если при некотором положении точки C окажется, что $\vec{R} = \vec{0}$, то $\vec{R} = \vec{0}$ и при любом другом положении точки C, а тогда $\vec{r}_N = \vec{r}_M^{90°}$ также при любом положении точки C.

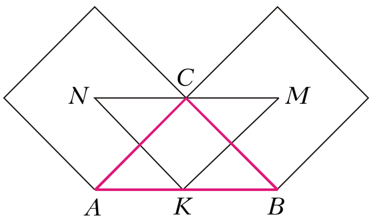

Рис. 3

Поместим точку C в положение, когда она является вершиной равнобедренного прямоугольного треугольника BCA (рис.3). Тогда, очевидно, центры квадратов – точки M и N – и середина отрезка AB – точка K – являются вершинами равнобедренного прямоугольного треугольника NKM, т.е. $\vec{r}_N = \vec{r}_M^{90°}$ (если за начало радиусов-векторов принять точку K). Следовательно, в этом положении точки C имеем $\vec{R} = \vec{0}$, а по сказанному выше $\vec{R} = \vec{0}$ при любом положении точки C. Но тогда треугольник NKM – равнобедренный прямоугольный также при любом положении точки C.

Прежде чем двинуться дальше, отметим, что важную роль здесь сыграло нахождение «хорошей точки» (мы будем называть ее полюсом) для начала радиусов-векторов (такой точкой оказалась точка K).

Перейдем теперь к решению более общей задачи.

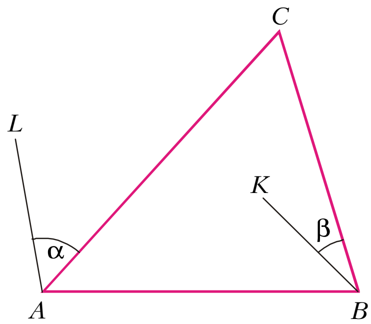

Рис. 4

Задача 2 (теоретическая). *Пусть нам дан треугольник ABC, $AB = c$. Пусть отрезок AL расположен так, что $\angle LAC = \alpha$ и $AL : AC = m$, а отрезок BK – так, что $\angle KBC = \beta$ и $BK : BC = n$ (рис.4). (На этом рисунке углы α, β положительны – для определенности, на самом деле это не принципиально.) Пусть точка O_1 – произвольная точка плоскости. Обозначим $\overrightarrow{O_1L} = \vec{r}_L$, $\overrightarrow{O_1K} = \vec{r}_K$. Требуется найти соотношение между $\vec{r}_L$ и $\vec{r}_K$ через m, n, α, β, точнее, выразить $\vec{r}_L$ через $\vec{r}_K$ и эти параметры.*

Решение. Вектор $\overrightarrow{AL}$ является образом вектора $\overrightarrow{AC}$ в результате поворота его на угол $\bar{\alpha}$ и умножения на число m. Таким образом,

$$\overrightarrow{AL} = m\overrightarrow{AC}^{\alpha}. \tag{2}$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{BK} = n\overrightarrow{BC}^{\beta}. \tag{3}$$

Теперь закрепим вершины A, B треугольника ABC и будем двигать точку C со скоростью $\vec{V}_C$. Скорости точек K и L обозначим $\vec{V}_K$, $\vec{V}_L$ соответственно. Из (2) и (3) получаем такие равенства:

$$\vec{V}_L = m\vec{V}_C^{\alpha}, \tag{4}$$

$$\vec{V}_K = n\vec{V}_C^{\beta}. \tag{5}$$

Из (5) получим, что

$$\vec{V}_C = \frac{1}{n}\vec{V}_K^{-\beta}. \tag{6}$$

Подставим полученное в (6) значение для $\vec{V}_C$ в (4) и получим

$$\vec{V}_L = m\vec{V}_C^{\alpha} = m\left(\frac{1}{n}\vec{V}_K^{-\beta}\right)^{\alpha} = \frac{m}{n}\vec{V}_K^{\alpha-\beta}. \tag{7}$$

Переходя к соотношению между радиусами-векторами, получим (используя 14°)

$$\vec{r}_L = \frac{m}{n}\vec{r}_K^{\alpha-\beta} + \vec{R}. \tag{8}$$

Тем самым мы решили поставленную задачу – нашли соотношение между векторами $\vec{r}_L$ и $\vec{r}_K$. Так как постоянный вектор $\vec{R}$ зависит от выбора начала радиусов-векторов $\vec{r}_L$, $\vec{r}_K$, то попытаемся подходящим выбором начала обратить этот вектор в нулевой. Тогда, если удастся найти такую «хорошую точку», формула (8) примет вид

$$\vec{r}_L = \frac{m}{n}\vec{r}_K^{\alpha-\beta}.$$

Иначе говоря, если нам удастся обратить постоянный вектор $\vec{R}$ в нулевой (за счет выбора начала радиусов-векторов в некоторой точке P, которую мы будем называть полюсом), то в любой момент времени, т.е. при любом положении точки C, отрезок KL будет виден из полюса P под углом $\alpha - \beta$, а отрезки PL и PK

Иллюстрация П.Чернуского