Цепочка тетраэдров

В.ЗАЛГАЛЛЕР

Рассмотрим правильный тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$. Отразив его вершину A_1 относительно плоскости $A_2A_3A_4$, получим точку A_5. Отразив точку A_2 относительно плоскости $A_3A_4A_5$, получим точку A_6. Вообще, получив очередной тетраэдр $A_nA_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}$ и отразив точку A_n относительно плоскости $A_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}$, получим точку A_{n+4} – вершину очередного тетраэдра $A_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}A_{n+4}$. К чему приводит эта конструкция? К винтообразной цепочке, изображенной на рисунке 1. Она же – в виде «шашлыка на шампуре» – показана на рисунке 2. А фотография этой цепочки – рисунок 3.

На фотографии видны три винтовые линии. Эти ломаные $A_1A_4A_7A_{10}A_{13}\ldots$, $A_2A_5A_8A_{11}A_{14}\ldots$ и $A_3A_6A_9A_{12}A_{15}\ldots$ видны и на рисунке 1. А на самом деле эти три линии можно объединить в одну винтовую линию $A_1A_2A_3A_4A_5\ldots$, вьющуюся вокруг некоторой прямой l.

Существование прямой l легко доказать при помощи теоремы Шаля для пространства, в силу которой любое перемещение пространства – это параллельный перенос, винтовое движение, скользящая или поворотная симметрия.[1] Поскольку тетраэдр $A_2A_3A_4A_5$ ориентирован так же, как и исходный тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$, то перемещение, которое увеличивает номер точки на единицу, т.е. переводит A_1 в A_2, A_2 в A_3, A_3 в A_4 и, наконец, A_4 в A_5, не может быть ни скользящей симметрией, ни поворотной симметрией (потому что эти преобразования не сохраняют, а меняют ориентацию). Не является оно и параллельным переносом. Значит, это винтовое движение! Применяя его многократно, получаем всю бесконечную цепочку тетраэдров.

Как расположена ось l порождающего бесконечную цепочку правильных тетраэдров винтового движения по отношению к этим тетраэдрам? Чтобы ответить на этот вопрос, найдем точки пересечения P_1 и P_2 оси l винтового движения с треугольниками $A_1A_2A_3$ и $A_2A_3A_4$ соответственно. Эти точки можно искать в декартовой системе координат. Но вычисления будут чуть проще, если воспользоваться барицентрическими координатами. Поскольку не все читатели знают, что это такое, дадим определение, сформулируем и докажем лемму и теорему, а после этого вернемся к точкам P_1 и P_2.

Определение. *Если P – точка плоскости ABC, то ее барицентрическими координатами относительно треугольника ABC называют числа* $x = S_{PBC}/S_{ABC}$, $y = S_{PCA}/S_{ABC}$ *и* $z = S_{PAB}/S_{ABC}$. (При этом, например, S_{PBC} – это площадь треугольника PBC, если точки P и A лежат по одну сторону от прямой BC, и взятая со знаком минус

[1] *Подробно об этом можно прочитать в книгах «Элементарная геометрия, ч.2 (стереометрия)» Ж.Адамара, «Введение в геометрию» Г.С.Коксетера, «Геометрические преобразования» П.С.Моденова и А.С.Пархоменко. (Прим. ред.)*

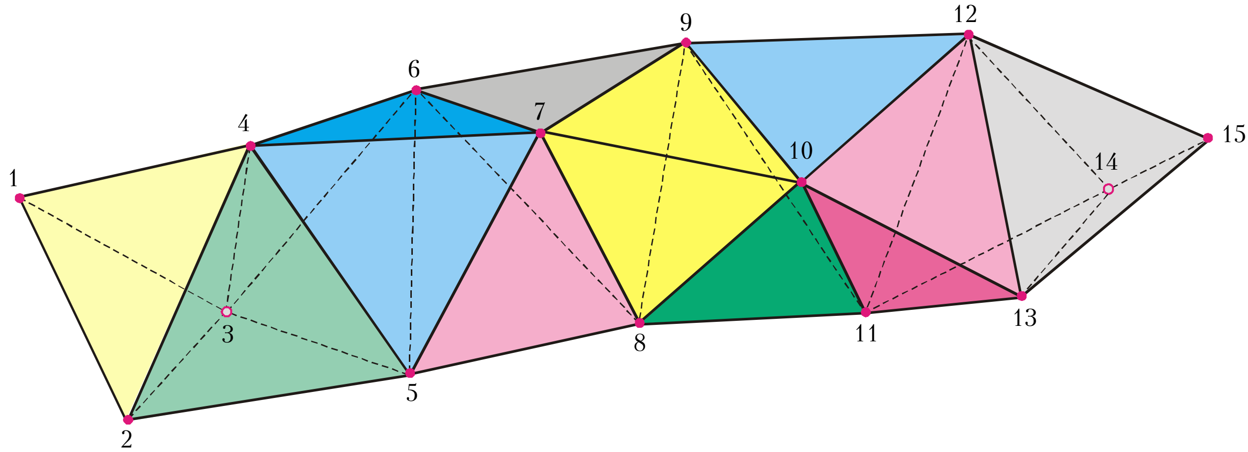

Рис. 1

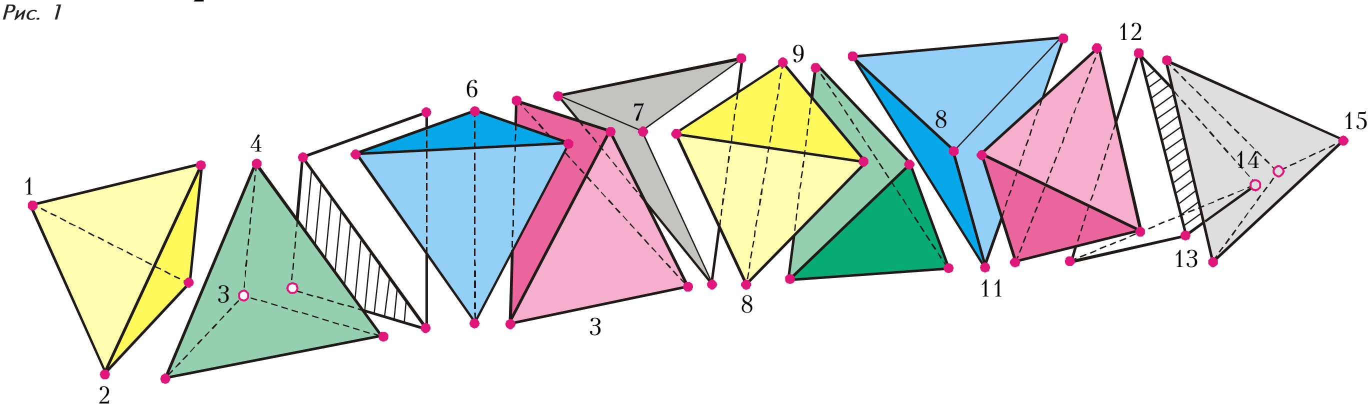

Рис. 2

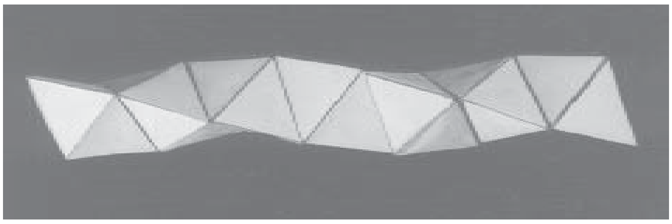

Рис. 3

площадь этого же треугольника, если точки P и A лежат по разные стороны от BC.)

Лемма. *Если точка P прямой AB обладает тем свойством, что $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, то для любой точки O имеем*

$$\overrightarrow{OP} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}.$$

Доказательство.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \lambda\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) =$$

$$= (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}.$$

Теорема. *Если $(x;\ y;\ z)$ – барицентрические координаты точки P плоскости ABC относительно треугольника ABC, то*

$$x + y + z = 1$$

и для любой точки O пространства

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}.$$

Доказательство. Во-первых,

$$x + y + z =$$

$$= \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{PCA}}{S_{ABC}} + \frac{S_{PAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1.$$

Во-вторых, обозначив буквой K точку пересечения прямой CP с прямой AB (случай параллельности прямых CP и AB легко разобрать отдельно), имеем

$$\overrightarrow{AK} : \overrightarrow{KB} = y : x$$

(случай $x = 0$ рассмотрите отдельно), так что в силу леммы

$$\overrightarrow{OK} = \frac{x}{x+y}\overrightarrow{OA} + \frac{y}{x+y}\overrightarrow{OB}$$

(случай $x + y = 0$ соответствует уже выделенной нами ситуации $CP \parallel AB$). Поскольку

$$\overrightarrow{CP} = \frac{S_{CAPB}}{S_{ABC}}\overrightarrow{CK} = (x+y)\overrightarrow{CK},$$

то в силу леммы

$$\overrightarrow{OP} = (1-x-y)\overrightarrow{OC} + (x+y)\overrightarrow{OK} = z\overrightarrow{OC} +$$

$$+ (x+y)\left(\frac{x}{x+y}\overrightarrow{OA} + \frac{y}{x+y}\overrightarrow{OB}\right) = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}.$$

Теперь мы готовы заняться вычислением барицентрических координат $(x;\ y;\ z)$ точек P_1, P_2 и P_3 относительно треугольников $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$ и $A_3A_4A_5$ соответственно. (Заметьте: поскольку при винтовом вращении точки P_1, A_1, A_2 и A_3 переходят в точки P_2, A_2, A_3 и A_4 соответственно, а при повторном винтовом движении – в точки P_3, A_3, A_4 и A_5, то мы не ошиблись, выписав только один набор барицентрических координат, а не три.) По теореме имеем

$$\overrightarrow{A_1P_1} = y\overrightarrow{A_1A_2} + z\overrightarrow{A_1A_3},$$

$$\overrightarrow{A_1P_2} = x\overrightarrow{A_1A_2} + y\overrightarrow{A_1A_3} + z\overrightarrow{A_1A_4},$$

$$\overrightarrow{A_1P_3} = x\overrightarrow{A_1A_3} + y\overrightarrow{A_1A_4} + z\overrightarrow{A_1A_5}.$$

Поскольку $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2P_3}$, то

$$x\overrightarrow{A_1A_2} + y\overrightarrow{A_1A_3} + z\overrightarrow{A_1A_4} - \left(y\overrightarrow{A_1A_2} + z\overrightarrow{A_1A_3}\right) =$$

$$= x\overrightarrow{A_1A_3} + y\overrightarrow{A_1A_4} + z\overrightarrow{A_1A_5} - \left(x\overrightarrow{A_1A_2} + y\overrightarrow{A_1A_3} + z\overrightarrow{A_1A_4}\right),$$

откуда

$$(2x-y)\overrightarrow{A_1A_2} + (2y-z-x)\overrightarrow{A_1A_3} + (2z-y)\overrightarrow{A_1A_4} = z\overrightarrow{A_1A_5}.$$

Так как

$$\overrightarrow{A_1A_5} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_4}\right),$$

то

$$\begin{cases} 2x - y = \dfrac{2}{3}z, \\ 2y - z - x = \dfrac{2}{3}z, \\ 2z - y = \dfrac{2}{3}z. \end{cases}$$

Добавляя к этим уравнениям известное нам равенство

$$x + y + z = 1,$$

получаем систему из четырех уравнений с тремя неизвестными. Решая ее, находим ответ: $x = 0{,}3$, $y = 0{,}4$ и $z = 0{,}3$.

Вернемся к нашей оси l. Прямая l равноудалена от точек A_1, A_2, A_3,… На какое расстояние? Конечно, если не знать длину ребра исходного правильного тетраэдра, то ответить на этот вопрос невозможно. Пусть для определенности $A_1A_2 = 1$. Обозначим для краткости $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A_1A_3} = \vec{b}$, $\overrightarrow{A_1A_4} = \vec{c}$. Тогда

$$\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 1,$$

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a} = \frac{1}{2}.$$

Для любой точки M прямой P_1P_2 существует такое число t, что

$$\overrightarrow{P_1M} = t\overrightarrow{P_1P_2}.$$

В силу леммы

$$\overrightarrow{A_1M} = (1-t)\overrightarrow{A_1P_1} + t\overrightarrow{A_1P_2} =$$

$$= (1-t)\left(0{,}4\vec{a} + 0{,}3\vec{b}\right) + t\left(0{,}3\vec{a} + 0{,}4\vec{b} + 0{,}3\vec{c}\right).$$

Следовательно,

$$A_1M^2 = \overrightarrow{A_1M}^2 = \left((0{,}4 - 0{,}1t)\vec{a} + (0{,}3 + 0{,}1t)\vec{b} + 0{,}3t\vec{c}\right)^2 =$$

$$= (0{,}4 - 0{,}1t)^2 + (0{,}3 + 0{,}1t)^2 + 0{,}09t^2 +$$

$$+ (0{,}4 - 0{,}1t)(0{,}3 + 0{,}1t) + (0{,}3 + 0{,}1t)\cdot 0{,}3t + 0{,}3t(0{,}4 - 0{,}1t),$$

откуда

$$100A_1M^2 = (4-t)^2 +$$

$$+ (3+t)^2 + 9t^2 + (4-t)(3+t) + 3t(3+t) + 3t(4-t).$$

Раскрыв скобки, получаем в правой части квадратный трехчлен

$$10t^2 + 20t + 37 = 10(t+1)^2 + 27 \ge 27,$$

причем при $t = -1$ достигается равенство. Таким образом, расстояние от точки A_1 до прямой l – т.е. минимальное значение расстояния A_1M – равно $\sqrt{\dfrac{27}{100}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{10}$.